

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

"Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)"

На правах рукописи

Скубачевский Антон Александрович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ  
В НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Специальность 25.00.29 – Физика атмосферы и гидросферы

Научный руководитель  
член-корреспондент РАН,  
профессор,  
доктор физико-математических наук  
Петров Игорь Борисович

Москва – 2022

# Оглавление

Введение. . . . .	5
<b>1 Физико-математическое описание взаимодействия заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной.</b>	<b>19</b>
1.1 Представление произвольной неоднородной электромагнитной волны в виде суперпозиции плоских электромагнитных волн. . . . .	19
1.2 Описание взаимодействия заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной, образованной двумя плоскими произвольно направленными волнами. . . . .	22
<b>2 Численная реализация уравнений движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне.</b>	<b>26</b>
2.1 Адаптация методов Дормана-Принса и Particle-in-cell (PIC) для численного решения уравнений движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне в вакууме. . . . .	26
2.2 Тестирование решений конечно-разностных уравнений движения заряженной частицы в плоской электромагнитной волне, полученных методами Дормана-Принса и PIC по данным аналитического решения.	34
2.3 Сопоставление дрейфа электрона вдоль электрического поля, вычисленного по данным численного решения и полученного методом возмущений. . . . .	39
<b>3 Анализ результатов численных экспериментов по исследованию трехмерной траектории электрона в неоднородной электромагнитной волне.</b>	<b>42</b>

3.1	Зависимость траектории электрона от параметров волны. . . . .	42
3.1.1	Зависимость траектории электрона от направляющих углов.	46
3.1.2	Зависимость скорости электрона от амплитуды и частоты электрического поля неоднородной волны. . . . .	49
3.2	Зависимость траектории электрона от начальных координат и скорости. . . . .	53
3.3	Инжекция электронов в неоднородную электромагнитную волну. .	59
3.3.1	Тестирование разработанной программы для моделирования инъекции электронов в неоднородную электромагнитную волну. . . . .	59
3.3.2	Особенности траектории электронов в неоднородной электромагнитной волне, определяющие режимы инъекции электронов. . . . .	63
3.3.3	Распределение электронов при инъекции в неоднородную электромагнитную волну при отсутствии внешнего магнитного поля. . . . .	66
3.3.4	Распределение электронов при инжектировании в обыкновенную и необыкновенную волны в ионосфере. . . . .	72
3.4	Спектр излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны. . . . .	78
3.4.1	Зависимость спектра излучения электрона от направляющих углов неоднородной электромагнитной волны. . . . .	79
3.4.2	Зависимость спектра излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны от амплитуды электрического поля и начальной скорости электрона. . . . .	89
3.4.3	Спектр излучения электрона в поле обыкновенной и необыкновенной волны в постоянном магнитном поле. . . . .	91
4	<b>Сравнение тормозного и гиромангнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.</b>	<b>98</b>
	<b>Заключение.</b> . . . . .	<b>105</b>

Литература. . . . .	107
---------------------	-----

## Введение.

При разработке новых технологий в навигации, локации, радиосвязи и в ряде других приложений необходимо учитывать микрофизические процессы взаимодействие электромагнитного излучения со средой распространения, в том числе, с ионосферной плазмой. Исходя из того, что ионосферную плазму для многих явлений можно считать низкотемпературной и бесстолкновительной, особое значение приобретает исследование поведения электронов ионосферы при взаимодействии с радиоволнами. Электронная концентрация играет определяющую роль в процессах отражения, поглощения, дисперсии и рефракции радиоволн. Микрофизические процессы, определяющие взаимодействие электронов с неоднородными электромагнитными волнами, во многом управляют режимами распространения радиоволн. Неоднородная электромагнитная волна имеет переменную амплитуду электрических и магнитных полей на поверхности фазового фронта. В реальной ионосфере радиоволны, взаимодействуя с неоднородностями электронной концентрации, в той или иной степени становятся неоднородными. В связи с вышеизложенным, в работе основное внимание уделено исследованию особенностей траектории электронов в неоднородной электромагнитной волне. С этой целью разработан программный комплекс, позволяющий моделировать широкий спектр неоднородных электромагнитных волн и взаимодействие их с электронами. Микрофизические процессы, определяющие взаимодействие электронов (как наиболее динамичной компоненты ионосферной плазмы) с неоднородными электромагнитными волнами, во многом управляют режимами распространения радиоволн, в том числе, обыкновенной и необыкновенной составляющих в присутствии геомагнитного поля, и процессами инжекции заряженных частиц в ионосферу. Полученные в работе результаты могут быть использованы при параметризации микрофизических

процессов в ионосфере для разработки современных численных моделей ионосферы, а также оценке мощности тормозного и гиромангнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны (для обыкновенной и необыкновенной волны, с учетом геомагнитного поля.)

В связи с развитием радиосвязи, появилась необходимость исследования взаимодействия электромагнитных волн с ионосферной плазмой. Впервые уравнения траектории электрона в плоской электромагнитной волне получены в [1]. Траектория электрона в плоской неполяризованной электромагнитной волне получена в результате решения уравнения Дирака [2] в полуклассической постановке: электромагнитное поле в классической, а электрон – в квантово-механической. Уравнение Дирака применимо для описания взаимодействия частиц путем обобщения методов классической и квантовой теории только к частицам с полуцелыми спинами. Решение Волкова внесло значительный вклад в исследование поведения электронов в мощных электромагнитных полях. Однако результаты работы [1] неприменимы для неоднородных электромагнитных волн, т.к. уравнения движения электрона в этом случае являются нелинейными. Использование уравнения Дирака оправдано в случае, когда масштабы явления сравнимы с комптоновской длиной волны. В связи с этим для большого класса физических явлений при исследовании взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем допустимо использование уравнений классической электродинамики.

В работах [3 – 8] получено аналитическое решение для движения электрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны. Например, в [3] приведено решение уравнений движения частицы в поле плоской монохроматической электромагнитной волны с помощью уравнения Гамильтона-Якоби, усреднения по времени и последующего перехода в систему отсчета, в которой частица в среднем покоится. Решение в лабораторной системе отсчета без усреднений не найдено. Выписаны также значения координаты и импульса частицы в поле плоской волны, поляризованной по кругу. В [4], [5] найдены траектория, компоненты скорости и импульса частицы в плоской электромагнитной волне с помощью решения уравнений движения частицы под действием силы Лоренца как функции параметра  $\tau = t - \frac{(\vec{k}, \vec{r})}{|\vec{k}|c}$ , где  $t$  – время,  $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы,  $c$  – ско-

рость света в вакууме. Таким образом, траектория для данной задачи не найдена в явном виде как функция времени, а лишь задана параметрически или найдена в приближенном виде или в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится. В [4] рассмотрено движение частицы в поле плоской электромагнитной волны в релятивистском случае. Показано, что движение частицы может быть представлено в виде суммы дрейфового движения и колебаний с частотой, отличной от несущей частоты волны. Также отмечено, что способ нахождения кинетической энергии электрона в работах [9 – 13] неверен в релятивистском случае. В работе [14] также исследовано движение электрона в плоской волне в релятивистском случае. Построены выражения, определяющие изменение энергии заряженной частицы как функции длины пролета, а также лабораторного времени. Найдены четыре возможных режима изменения энергии электрона. Получена функциональная связь начальных импульсов с амплитудой электромагнитной волны. Различные модификации задачи о движении электрона в плоской электромагнитной волне рассмотрены в работах [15 – 20].

В [21], [22], [23], [24] приведено решение системы уравнений движения заряженной частицы в плоской, поперечно-электрической или поперечно-магнитной неоднородной электромагнитной волне методом возмущений. В [21] параметром разложения является  $\eta = \frac{eE}{mc\omega}$  – отношение энергии, которая может быть передана частице полем  $E$  на длине волны, к энергии покоя частицы. Также, как и в работе [4], движение частицы представлено в виде суммы дрейфа с постоянной скоростью и колебаний с несущей частотой волны. Приведено аналитическое выражение для импульса частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне, рассмотрены его средние значения и сделаны выводы про зависимость дрейфа от фазы. Найден период переменной силы, действующей на частицу, и отмечено, что он не совпадает с периодом колебаний поля неоднородной электромагнитной волны. Показано распределение частиц, инжектированных в плоскую электромагнитную волну. Исследовано движение частицы в неоднородной электромагнитной волне методом возмущений при различных начальных и граничных условиях. Найдены средние значения скорости и ускорения частицы, движущейся в неоднородной электромагнитной волне. С помощью усреднения полученных в

[21] уравнений для ускорения получено выражение, которое согласуется с результатами работы Гапонова-Миллера [25]. В [23], [24] исследовано взаимодействие заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной методом последовательных приближений с помощью силы Гапонова-Миллера: в [24] исследуется решение с точностью до третьего порядка, а в [23] – до четвертого порядка. В [23] найдены скорости и ускорения частицы в неоднородной электромагнитной волне с точностью до 4 порядка, а также доказано, что на частицу, движущуюся в неоднородной электромагнитной волне, действует усредненная сила, пропорциональная  $\langle E \rangle^4$ .

В ряде работ исследовано движение частицы в плоской модулированной электромагнитной волне, а также найдены аналитические решения. В [26] исследовано движение электрона в плоской модулированной электромагнитной волне, а также учтено влияние постоянного магнитного поля. В [27] получено аналитическое решение для траектории частицы в плоской монохроматической амплитудно-модулированной электромагнитной волне, а также оценена кинетическая энергия частицы. В [28] найдены угловое распределение и интенсивность излучения заряженной частицы в поле амплитудно-моделированной электромагнитной волны. В [29] рассмотрено движение частицы в частотно-модулированной электромагнитной волне. В [30] – в фазово-модулированной электромагнитной волне.

В наши дни актуальной проблемой является поиск новых способов ускорения заряженных частиц из-за высоких энергозатрат [31]. Например, в работах [32 – 33] рассмотрено ускорение с помощью ультракоротких лазерных импульсов в вакууме. В [34] исследовано ускорение заряженных частиц в плазме. Ускорение частиц с помощью модулированных импульсов исследовано в [30, 35, 36, 37]. Т.к. точного аналитического решения задачи о движении частицы в поле реального лазерного импульса не существует, прибегают к численным расчетам [38 – 40]. В некоторых простых случаях допустимо использовать приближение для лазерного импульса в виде плоской модулированной электромагнитной волны [4].

Лазерный ускоритель продольным полем сфокусированного лазерного пучка исследован в работе [41]. В данной работе частица ускорялась на одном полупериоде волны и замедлялась на другом, поэтому для получения ускорения частицы

необходимо удалять частицу из лазерного пучка после полупериода движения. Этот эффект называется "эффект фазового проскальзывания". В исследованиях, описанных в [41], электроны были ускорены импульсом длительностью  $\sim 1$  пс и энергией  $\sim 1$  Дж до энергии  $\sim 1$  МэВ. В работе [42] показано, что для ускорения электронов могут быть использованы асимметричные Эрмит-Гауссовы пучки, в которых максимальное значение продольного поля достигается на оси пучка. В работах [43 – 51] с помощью численных методов исследовано ускорение электронов в вакууме сфокусированным лазерным пучком интенсивности  $I = 10^{21} - 10^{22}$  Вт/см<sup>2</sup>. Захват электрона лазерным пучком и его ускорение до энергии  $\sim 1$  ГэВ возможен при определенных углах влета и определенных значениях начальной скорости электрона.

Движение частиц в электромагнитной волне также исследовалось в работах ИОФ РАН [4, 18, 19, 52, 53 – 56, 57]. В [18] рассматривается движение заряженной частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне, а также в плоской квазимонохроматической электромагнитной волне. Получено приближенное решение уравнений движения заряженной частицы в плоском электромагнитном импульсе. Проведено сравнение аналитического решения с результатами численного моделирования с помощью метода Particle-in-Cell (PIC). Для PIC-моделирования в работах [18, 19, 52] использован программный пакет "КАРАТ". Руководство по данному программному пакету изложено в [58].

Воздействием радиоволн на ионосферу начали заниматься во второй половине 20го века. Эксперимент по воздействию мощных электромагнитных волн на ионосферу был проведен в СССР в 1961 году на станции под Москвой [59]. Данный эксперимент был основан на идеях, изложенных в работе Бейли [60], в которой был предложен механизм разогрева ионосферы вследствие резонанса на гирочастоте  $\Omega_{ce} = 1.45$  МГц между движением электронов в ионосфере и падающей волной. Предполагалось, что при подобном воздействии на ионосферу есть возможность наблюдать свечение ионосферы. Однако данный эксперимент не дал ожидаемого результата. Воздействие электромагнитным излучением на ионосферу в наши дни проводится на нагревных стендах, например, HAARP (Аляска, США), EISCAT (Тромсе, Норвегия), Сура (Нижний Новгород, Россия) [61 – 63]

и др. При воздействии электромагнитных волн на ионосферу выделяют обыкновенную и необыкновенную волны, по-разному взаимодействующих с ионосферной плазмой и имеющих разную высоту отражения от ионосферы. Для понимания механизма нагрева ионосферы в работе выполнено исследование величины тормозного и гироманнитного излучения электрона в ионосфере, в поле неоднородных обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн, и сравнение их вклада в воздействие на ионосферу. Тормозное и гироманнитное излучение заряженной частицы в поле электромагнитной волны подробно описаны в [3, 64]. Сопоставление тормозного и гироманнитного излучения электрона в ионосфере на высотах 100 и 300 км, с учетом поглощения, в поле плоской волны приведен в [65].

Численная реализация уравнений, описывающих движение частиц в электромагнитном поле, может быть выполнена с помощью методов Рунге-Кутты и РС. В случае, если поле известно во всех точках пространства в произвольный момент времени, необходимо будет решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для вычисления траектории и спектра излучения заряженной частицы. Используем для этого метод Рунге-Кутты, в котором в качестве численного значения для следующего шага по времени брался результат, полученный по схеме пятого порядка точности, известный как метод Дормана-Принса [66]. В этом методе также применяется схема четвертого порядка для управления шагом интегрирования. В случае же, когда поле неизвестно в произвольный момент времени, а известны только его начальные значения и характеристики среды, нужно решать систему уравнений Максвелла и движения частицы одновременно, причем, чтобы не нарушалось уравнение непрерывности. Для этого подходит метод РС. Кроме того, при большем количестве частиц решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой будет крайне неэффективно. В данном случае более подходящим также является метод РС.

Для вычисления электромагнитных полей в методе РС на каждом шаге применяется метод FDTD (Finite-difference Time-domain), впервые предложенный Кейном Йи [67], использующийся для решения системы уравнений Максвелла. Метод FDTD подробно описан, например, в [68]. Данный метод обладает рядом преимуществ: это явный метод, в котором не возникает сложностей с вычислением об-

ратных матриц; он точный, в нем явно видны источники ошибок; данный метод бездивергентный (в большинстве других методов возникает численная ошибка: уравнение  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  не выполняется точно, в связи с чем приходится вводить калибровку и решать дополнительно эллиптическую систему, что весьма затратно), позволяет производить простую декомпозицию по данным, удобен для визуализации, позволяет легко строить радиолокационные портреты объектов.

В 1975 году Тафлов и Брудвин выписали критерий численной устойчивости алгоритма Йи, а также были приведены первые синусоидальные стационарные решения для взаимодействия электромагнитной волны со средой [69, 70]. В 1977 году Холланд [71] применил данный метод для решения задач, связанных с электромагнитным излучением (EMP problems). В 1980 году Тафлов ввел саму аббревиатуру FDTD и промоделировал взаимодействие синусоидальной электромагнитной волны с трехмерной металлической полостью [72].

В 1980 году Мур придумал для метода FDTD первые численно устойчивые поглощающие граничные условия второго порядка точности [73], далее исследованные в работах Кригсмана и Мура в 1987–88 годах [74, 75]. Абсолютно новый уровень поглощающих граничных условий, названный PML ABC (Perfectly-matched layer absorbing boundary conditions), был предложен Беренджером в 1994 году [76]. Его суть заключается в задании проводимости на границе области моделирования в виде функции, возрастающей от центра области к ее краям. Точный вид данной функции, как и размер области PML, влияет на точность граничных условий и является предметом для обсуждений. Для 3d случая метод был обобщен Кацем [77]. Для волноводов данные граничные условия были применены в работе Рейтера [78]. В 1995–1996 годах Сакс [79] и Гедни [80] представили UPML (uniaxial Perfectly-matched layer). В 2000 году Роден и Гедни усовершенствовали метод, представив CPML (convolutional perfectly-matched layer).

В 1982–83 годах Тафлов и Умашанкар разработал первые модели рассеяния электромагнитных волн в ближней и дальней волновой зонах (near, far field) [81, 82]. В 1983 году Холланд ввел метод TFSF (Total-field scattered-field) [83] для моделирования источников, излучающих в одном направлении, в том числе, плоских волн. В этом методе область моделирования разделяется на область полного по-

ля (total-field) и отраженного поля (scattered-field): в области отраженного поля есть только отраженные от материальных объектов волны. Достигается это за счет прибавления или вычитания из полей определенной поправки в граничных ячейках областей полного и отраженного поля.

В 2003 году в работе [84] представлен одношаговый, безусловно устойчивый метод FDTD. В 2002 году Хуанг [85], Чанг и Тафлов [86] представили квантовый метод FDTD. В 2004 году Сориано и Наварро вывели условие устойчивости для этого метода [87]. В 2012–2014 годах Моксли выпустил серию работ [88 – 90], развивая данное направление. За этими работами по данной теме последовала в 2017 году работа [91].

В 2008 году Ахмед, Чуа и Лин ввели в своей работе трехмерный локально-одномерный FDTD (LOD) [92]. В 2010 году Чаудхури и Беф объединили метод FDTD с моделью плазменной жидкости [93].

Для моделирования электромагнитных волн с помощью метода FDTD написано множество солверов: как моделирующих только метод FDTD, так и являющихся частью больших программных пакетов: Matlab[94], ANSYS [95], COMSOL [96], EMTL [97], XFDTD [98].

Этой тематикой занимаются в ИПМ РАН им. Келдыша, также решая систему уравнений МГД [99 – 102]. Интерес представляет интеграция метода FDTD в существующий солвер для оптимизации решения некоторых задач. В моделировании фотонных кристаллов также были достигнуты некоторые результаты: в основном, программы для моделирования фотонных кристаллов были написаны на языке MatLab, но являются несовершенными и содержат ошибки. Кроме того, сложности для решения представляет обратная задача: какую структуру необходимо создать, чтобы свет проходил в нужных направлениях в нужных пропорциях.

Также существует родственный метод FDFD [103], основанный на переходе в частотную область. В дальнейшем имеет смысл совмещение этих двух алгоритмов для оптимизации программы и расширения круга решаемых задач. Большой интерес также представляет задача создания солвера с помощью метода FDTD на произвольных сетках (не обязательно прямоугольных), которая на данный момент еще не решена.

Алгоритм в настоящей работе реализован в виде программного модуля для моделирования распространения электромагнитных волн с различными граничными условиями в 2D и 3D случаях, в том числе, для неоднородной среды.

Для моделирования движения частиц в электромагнитных полях применяется метод Particle-in-Cell, в котором также используется метод FDTD для подсчета полей. Данный метод подробно описан в книгах [104], [105], [106]. Метод возник в 1955 году, когда Харлоу выпустил работы [107, 108]. Метод частиц был использован в 1950х – начале 1960х годов [109, 110]. В [110] модельные частицы имели форму заряженных плоскостей для моделирования одномерных колебаний плазмы. Начиная с 1960-х годов в СССР начали проводиться исследования и создаваться программы по этому методу [111]. Данным методом активно занимался Н.Н.Яненко со своими учениками, внося в него существенный вклад [112]. Однако, большинство работ было засекречено. Значительный вклад в данный метод был внесен О.М.Белоцерковским, применившим его к задачам вычислительной аэродинамики. По результатам данных работ была написана [113]. Также Белоцерковский и Яницкий развивали статистические методы частиц и их применение в динамике разреженного газа [114, 115]. В статистических методах используется метод Монте-Карло [116 – 120]. Статистические методы были подробно исследованы Бердом, написавшим по ним [121]. Для нахождения скоростей и координат частиц Бóрисом был предложен эффективный алгоритм [122], который разбивает движение частицы на каждом шаге по времени на 3 этапа: движение на полшага под действием электрического поля, поворот за счет магнитного и продвижение еще на полшага за счет электрического. Для расчетов по методу Particle-in-Cell было разработано множество моделей распределения частиц по сетке [123, 124, 125, 126], в которых частицы дают разный вклад в плотность заряда в ближайших узлах сетки, в зависимости от введенного в методе сеточного ядра.

В работах Вилласенора, Бунемана и Есиркепова [127, 128] предложены численные методы решения уравнения непрерывности и нахождения плотности тока на сетке.

Вернер, Дженкинс и пр. в 2018 г. предложили метод SLPIC (Speed-Limited Particle-In-Cell) [129]. Данная разновидность метода PIC позволяет ускорить про-

цесс моделирования в ситуации, когда распределение частиц в плазме изменяется медленно по сравнению с максимальным стабильным временным шагом PIC. То есть данный метод позволяет проводить полностью кинетическое моделирование в ситуациях, в которых ранее использовались магнитогидродинамический (МГД), двухжидкостный или электронный метод Больцмана.

В ИРЭ метод PIC используется для моделирования отражения лазерных импульсов большой амплитуды от релятивистских электронных зеркал [130], [131], а также применяется при моделировании взаимодействия лазерных пучков с наноразмерными мишенями [132]. На основе метода PIC также разработаны такие программные пакеты, как XOOPIC [133], VSim [134], VORPAL [135].

Изложенные выше методы используются в данной работе для численного моделирования микрофизических процессов, описывающих поведение заряженных частиц в ионосферной плазме. В ходе проведения численных экспериментов было выявлено, что метод Домана-Принса является более точным и требует меньше вычислительных ресурсов для решения поставленных в диссертации задач, поэтому используется в большинстве проведенных расчетов. Однако, метод PIC также использовался в некоторых расчетах, в том числе, при сравнении с результатами, полученными по методу Домана-Принса. Данный метод также незаменим при расчетах, в которых электромагнитное поле не задается, а вычисляется на каждом шаге по времени, а также может быть использован для одновременного расчета движения произвольного количества заряженных частиц в плазме.

**Цели и задачи.** Основной целью работы является исследование взаимодействия электронов как наиболее динамичной компоненты низкотемпературной бесстолкновительной ионосферной плазмы с неоднородными электромагнитными волнами на основе численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В том числе, исследовать спектральный состав тормозного и гироманнитного излучения электрона в присутствии геомагнитного поля для обыкновенной и необыкновенной неоднородной электромагнитной волны.

Для достижения поставленных целей в работе были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработка численной модели для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами движения заряженной частицы в поле неоднородной электромагнитной волны с помощью метода Дормана-Принса. Верификация результатов с помощью сравнения с точными аналитическими решениями, а также с приближенными решениями методом возмущений, по результатам работ, опубликованных ранее [21, 23, 22]; верификация с использованием метода Particle-in-Cell (PIC), реализованного с помощью программного пакета, написанного на языке C++.
2. Используя разработанную модель, на основе серии численных экспериментов изучить особенности траектории электрона в поле неоднородной электромагнитной волны, в том числе, с учетом постоянного магнитного поля (для обыкновенной и необыкновенной волны), в зависимости от амплитуды, фазы и частоты неоднородной электромагнитной волны, волновых векторов плоских волн, образующих неоднородную волну, а также от начальных координат и скорости электрона.
3. Исследование распределения электронов, инжектированных в неоднородную электромагнитную волну, в том числе, в случае обыкновенной и необыкновенной волны. Определение зависимости распределения инжектированных электронов от амплитуды электрического поля и несущей частоты неоднородной

электромагнитной волны, а также от начальных скоростей электронов.

4. Исследование спектра излучения электрона в поле неоднородной волны на основе численных экспериментов, в том числе, с учетом геомагнитного поля (для обыкновенной и необыкновенной волны), при различных параметрах неоднородной электромагнитной волны и электрона.
5. Проведение серии численных экспериментов по исследованию тормозного и гиромангнитного излучения электрона в поле обыкновенной и необыкновенной неоднородной электромагнитной волны с учетом постоянного магнитного поля Земли.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод построения 3d-траектории электрона ионосферной плазмы в поле неоднородной электромагнитной волны на основе численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, при заданных характеристиках волны и электрона.
2. Установлена зависимость пространственного распределения электронов при последовательной инжекции в неоднородную электромагнитную волну, в том числе, обыкновенную и необыкновенную, от амплитуды электрического поля и несущей частоты волны, а также от начальных скоростей электронов.
3. Для обыкновенной неоднородной электромагнитной волны установлено, что мощность тормозного излучения превосходит мощность гиромангнитного при амплитуде электрического поля  $E_0 \gtrsim 15$  В/м. Для необыкновенной волны мощность гиромангнитного излучения всегда превышает мощность тормозного (расчеты выполнены в присутствии постоянного магнитного поля, характерного для зоны высоких широт).
4. Взаимодействие электронов ионосферной плазмы с неоднородной электромагнитной волной сопровождается модуляцией волны с частотой  $\Omega$ , определяемой колебательным движением электрона внутри интерференционной ячейки.

Установлена возможность управления боковыми частотами несущей частоты  $\omega_0 \pm \Omega$  и модулирующей частотой  $\Omega$  с помощью направляющих углов и амплитуды электрического поля неоднородной электромагнитной волны.

**Научная новизна исследования.** Впервые на основе численного решения нелинейной системы уравнений с переменными коэффициентами построена трехмерная траектория заряженной частицы в поле неоднородной электромагнитной волны, а также исследована зависимость построенных траекторий от параметров волны и частицы, в том числе, для обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн. Впервые проведено сравнение тормозного и гиромангнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны, в том числе, в обыкновенной и необыкновенной волне, с учетом геомагнитного поля. Также выполнены расчеты инжекции электронов в обыкновенную и необыкновенную электромагнитную волну.

**Теоретическая и практическая значимость.** Одним из актуальных и в настоящее время не решенных до конца вопросов ионосферной физики является взаимодействие неоднородных электромагнитных волн (обыкновенных и необыкновенных) с ионосферной плазмой, определяющих процессы поглощения, рассеяния, рефракции и другие. Эти проблемы имеют практическое значение для радиосвязи, навигации и функционирования ГЛОНАСС, GPS, Бэйдоу и других. Некоторые из них связаны с недостаточной изученностью микрофизических процессов взаимодействия заряженной компоненты ионосферной плазмы с неоднородными электромагнитными волнами со сложной морфологией волнового фронта. В период ионосферных возмущений электромагнитные волны в гигагерцовом и мегагерцовом диапазоне рефрагируют и создают спонтанные интерференционные структуры, в которых электроны ионосферы разгоняются до значительных скоростей, создавая положительную обратную связь между исходным ионосферным возмущением и вторичным воздействием ускоренных электронов на ионосферную плазму. Для исследования микрофизических процессов в ионосфере, разработана трехмерная численная модель взаимодействия наиболее динамичной компоненты плазмы (электронов) с неоднородной электромагнитной волной. С помощью по-

строенной модели численно исследованы тормозное и гироманнитное излучение электрона в поле обыкновенной и необыкновенной неоднородной электромагнитной волны. При расчетах использованы выполненные оценки электрических и магнитных полей, индуцированных нагревными стендами HAARP, Sura, EISCAT, на выбранных высотах ионосферы.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность полученных данных определяется верификацией результатов численного моделирования движения частицы в неоднородной электромагнитной волне с помощью сравнения с точными аналитическими и приближенными решениями, опубликованными ранее. Для проверки надежности алгоритмов и программ, разработанных при создании численной модели на основе метода Дормана-Принса, использовался также численный метод PIC. Сопоставление расчетов, выполненных по данным моделям, показало хорошее совпадение. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. *Skubachevskii A.A.* Simulation of Electromagnetic Wave Propagation in the Medium Using FDTD Method. Piers Shanghai. 2016.  
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/tocresult.jsp?isnumber=7734201>.
2. *Скубачевский А.А.* Численное решение уравнений Максвелла для моделирования распространения электромагнитных волн. 58я научная конференция МФТИ. 2015.
3. *Skubachevskii A.A.* Numerical modeling of electromagnetic waves. FDTD and PIC methods. QIPA 2018.
4. *Скубачевский А.А.* Численное решение уравнений Максвелла. FDTD- и PIC-методы. 61я научная конференция МФТИ. 2018.
5. *Skubachevskii A.A.; V.B. Lapshin.* Charged particles in the field of an inhomogeneous electromagnetic wave. QIPA 2020.

# Глава 1

## Физико-математическое описание взаимодействия заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной.

### 1.1 Представление произвольной неоднородной электромагнитной волны в виде суперпозиции плоских электромагнитных волн.

Рассмотрим неоднородную электромагнитную волну в вакууме. Разложим векторный потенциал волны в ряд Фурье:

$$\vec{A} = \sum_k A_k(t) e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

где  $\vec{k}$  имеет компоненты  $k_x = \frac{2\pi n_x}{X}$ ,  $k_y = \frac{2\pi n_y}{Y}$ ,  $k_z = \frac{2\pi n_z}{Z}$ ,  $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ ,  $X, Y, Z$  - периоды по каждой из координат. Причем, из уравнения  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  следует:

$$\vec{k}\vec{A}_k = 0.$$

$\vec{A}_k$  удовлетворяют уравнению:

$$\ddot{\vec{A}}_k + c^2 k^2 \vec{A}_k = 0.$$

Электрическое и магнитное поля волны:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}\sum_k \dot{\vec{A}}_k e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = i\sum_k \vec{k}\vec{A}_k e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

Любой конечный (а также абсолютно интегрируемый) сигнал длительностью (или периодом)  $T$  можно представить в виде ряда Фурье:

$$\vec{A}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{a}_k e^{i\omega_k t},$$

$$\vec{a}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{A}(t) e^{-i\omega_k t} dt,$$

где  $\omega_k = \frac{2\pi}{T}k$ .

В силу теоремы о равномерной сходимости ряда Фурье, мы можем с необходимой точностью ограничиться разложением до конечного числа членов достаточно гладких полей (непрерывных и кусочно непрерывно дифференцируемых).

Тогда уравнения движения заряженной частицы в произвольной неоднородной электромагнитной волне могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} x'' = & \frac{q}{m\gamma} \left( \sum_{i=1}^n E_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) + \frac{y'}{c} \sum_{i=1}^n H_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) - \right. \\ & - \frac{z'}{c} \sum_{i=1}^n H_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) - \frac{1}{c^2} \left( x'^2 \sum_{i=1}^n E_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) + \right. \\ & \left. \left. + x'y' \sum_{i=1}^n E_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) + x'z' \sum_{i=1}^n E_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) \right) \right), \\ y'' = & \frac{q}{m\gamma} \left( \sum_{i=1}^n E_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) + \frac{z'}{c} \sum_{i=1}^n H_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) - \right. \\ & - \frac{x'}{c} \sum_{i=1}^n H_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) - \frac{1}{c^2} \left( x'y' \sum_{i=1}^n E_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)}\vec{r} + \Phi_i) + \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
& + y'^2 \sum_{i=1}^n E_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) + y' z' \sum_{i=1}^n E_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) \Big) , \\
z'' = & \frac{q}{m\gamma} \left( \sum_{i=1}^n E_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) + \frac{x'}{c} \sum_{i=1}^n H_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) - \right. \\
& - \frac{y'}{c} \sum_{i=1}^n H_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) - \frac{1}{c^2} \left( x' z' \sum_{i=1}^n E_{x,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) + \right. \\
& \left. \left. + y' z' \sum_{i=1}^n E_{y,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) + z'^2 \sum_{i=1}^n E_{z,0}^{(i)} \sin(\omega_0^{(i)} t - \vec{k}^{(i)} \vec{r} + \Phi_i) \right) \right) ,
\end{aligned}$$

где  $x, y, z$  — координаты и скорости (со штрихами) частицы,  $m$  — ее масса,  $q$  — заряд,  $\vec{E}, \vec{H}$  — электрическое и магнитной поля неоднородной волны,  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  — компоненты электрического и магнитного полей,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ,  $c$  — скорость света,  $t$  — время,  $\Phi_i$  — фаза,  $\omega_0$  — частота волны,

$$\vec{k}^{(i)} = \begin{pmatrix} k_x^{(i)} \\ k_y^{(i)} \\ k_z^{(i)} \end{pmatrix},$$

где

$$k_x^{(i)} = k_0^{(i)} \cos \varphi_i \cos \theta_i,$$

$$k_y^{(i)} = k_0^{(i)} \sin \varphi_i \cos \theta_i,$$

$$k_z^{(i)} = k_0^{(i)} \sin \theta_i,$$

$$k_0^{(i)} = \frac{2\pi c}{\omega_0^{(i)}},$$

$$E_{x,0}^{(i)} = E_0^{(i)} (\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \sin \theta_i \cos \varphi_i),$$

$$E_{y,0}^{(i)} = E_0^{(i)} (-\cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \sin \theta_i \sin \varphi_i),$$

$$\begin{aligned}
E_{z,0}^{(i)} &= E_0^{(i)} \sin \psi_i \cos \theta_i, \\
H_{x,0}^{(i)} &= H_0^{(i)} (\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \sin \theta_i \cos \varphi_i), \\
H_{y,0}^{(i)} &= H_0^{(i)} (-\sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \sin \theta_i \sin \varphi_i), \\
H_{z,0}^{(i)} &= H_0^{(i)} (-\cos \psi_i \cos \theta_i),
\end{aligned}$$

где  $E_0^{(i)}$  и  $H_0^{(i)}$  – амплитуды электрического и магнитного полей  $i$ -й плоской волны.

Положение плоских монохроматических волн и направление электрического поля в них задается тремя углами:  $\varphi$  – угол между проекцией волнового вектора на плоскость  $XU$  и осью  $OX$ ,  $\theta$  – угол между волновым вектором и его проекцией на плоскость  $XU$ ,  $\psi$  – угол между векторным произведением  $[\vec{k} \times \vec{z}]$  и вектором электрического поля волны  $\vec{E}$ . Изменяя эти углы, можно существенным образом изменить характеристики движения частицы. Данная численная модель применима для исследования взаимодействия заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной при наличии постоянной составляющей магнитного поля (геомагнитное поле).

## 1.2 Описание взаимодействия заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной, образованной двумя плоскими произвольно направленными волнами.

Рассмотрим следующий случай. На примере неоднородной электромагнитной волны, создаваемой суперпозицией двух произвольно направленных по отношению друг к другу плоских монохроматических электромагнитных волн, демонстрируется подход, позволяющий моделировать широкий спектр явлений при взаимодействии заряженной частицы с неоднородной электромагнитной волной.

Запишем суперпозицию двух произвольно направленных плоских волн:

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{x,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + E_{x,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right), \\
E_y &= E_{y,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + E_{y,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right), \\
E_z &= E_{z,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + E_{z,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right), \\
H_x &= H_{x,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + H_{x,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right), \\
H_y &= H_{y,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + H_{y,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right), \\
H_z &= H_{z,0}^{(1)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{A}, \vec{r}) + \Phi_1 \right) + H_{z,0}^{(2)} \sin \left( \omega_0 t - k_0(\vec{B}, \vec{r}) + \Phi_2 \right),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ,  $A_{x,y,z}, B_{x,y,z}$  – проекции волновых векторов волн на оси координат,  $E_{x,0}, E_{y,0}, E_{z,0}, H_{x,0}, H_{y,0}, H_{z,0}$  обозначает компоненты амплитуд,  $\Phi_{1,2}$  – начальная фаза,  $\omega_0$  – частота волны. При этом  $A_x = \cos \varphi_1 \cos \theta_1$ ,  $A_y = \sin \varphi_1 \cos \theta_1$ ,  $A_z = \sin \theta_1$ ,  $B_x = \cos \varphi_2 \cos \theta_2$ ,  $B_y = \sin \varphi_2 \cos \theta_2$ ,  $B_z = \sin \theta_2$ ,

$$\begin{aligned}
E_{x,0} &= E_0 (\cos \psi_1 \sin \varphi_1 - \sin \psi_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + \\
&\quad \cos \psi_2 \sin \varphi_2 - \sin \psi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2), \\
E_{y,0} &= E_0 (-\cos \psi_1 \cos \varphi_1 - \sin \psi_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 - \\
&\quad \cos \psi_2 \cos \varphi_2 - \sin \psi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2), \\
E_{z,0} &= E_0 (\sin \psi_1 \cos \theta_1 + \sin \psi_2 \cos \theta_2), \\
H_{x,0} &= H_0 (\sin \psi_1 \sin \varphi_1 + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + \\
&\quad \sin \psi_2 \sin \varphi_2 + \cos \psi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2), \\
H_{y,0} &= H_0 (-\sin \psi_1 \cos \varphi_1 + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 - \\
&\quad \sin \psi_2 \cos \varphi_2 + \cos \psi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2), \\
H_{z,0} &= H_0 (-\cos \psi_1 \cos \theta_1 - \cos \psi_2 \cos \theta_2),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – амплитуды неоднородной волны. Углы  $\varphi_1, \theta_1, \psi_1, \varphi_2, \theta_2, \psi_2$  проиллюстрированы на рис. 1.1.

Уравнения движения заряженной частицы (1.1) с учетом введенных выше обозначений (1.2), (1.3) для неоднородной волны, образованной двумя произвольно

направленными плоскими волнами, представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 x'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_x + \frac{y'}{c} H_z - \frac{z'}{c} H_y - \frac{x'}{c^2} (x' E_x + y' E_y + z' E_z) \right), \\
 y'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_y + \frac{z'}{c} H_z - \frac{x'}{c} H_y - \frac{y'}{c^2} (x' E_x + y' E_y + z' E_z) \right), \\
 z'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_z + \frac{x'}{c} H_z - \frac{y'}{c} H_y - \frac{z'}{c^2} (x' E_x + y' E_y + z' E_z) \right).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

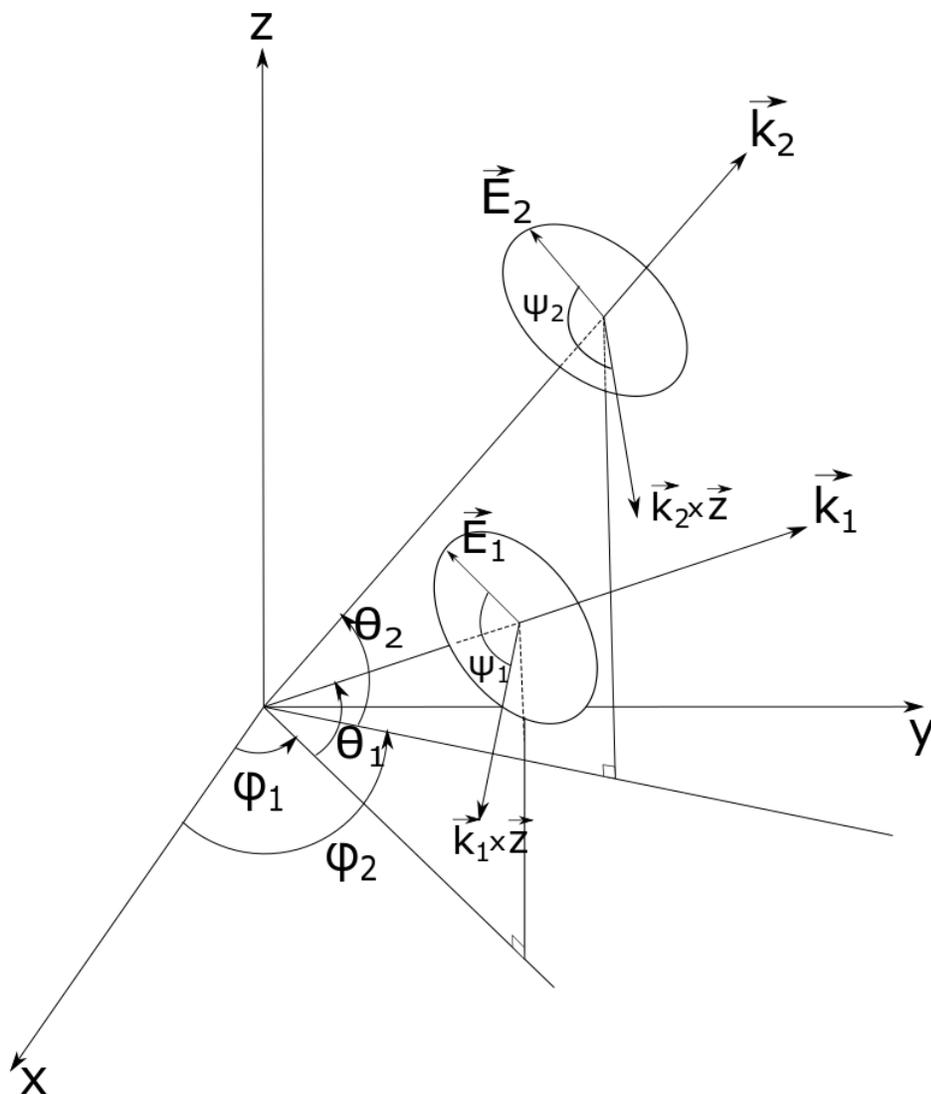


Рис. 1.1: Схема, демонстрирующая задание плоской волны:  $\varphi$  - угол между направлением оси  $OX$  и проекцией волнового вектора на плоскость  $(x,y)$ ;  $\theta$  - угол между осью  $OZ$  и направлением волнового вектора;  $\psi$  - угол между направлением вектора электрического поля и векторным произведением волнового вектора и нормали к плоскости  $(x, y)$ .

## Глава 2

# Численная реализация уравнений движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне.

### 2.1 Адаптация методов Дормана-Принса и Particle-in-cell (PIC) для численного решения уравнений движения заряженной частицы в неоднородной электромагнитной волне в вакууме.

Метод Дормана-Принса.

Для численного решения перепишем систему (1.4) в виде:

$$\begin{aligned}
 x' &= \xi, \\
 y' &= \eta, \\
 z' &= \zeta, \\
 \xi' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_x + \frac{\eta}{c} H_z - \frac{\zeta}{c} H_y - \frac{1}{c^2} (\xi^2 E_x + \xi\eta E_y + \xi\zeta E_z) \right), \\
 \eta' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_y + \frac{\zeta}{c} H_x - \frac{\xi}{c} H_z - \frac{1}{c^2} (\xi\eta E_x + \eta^2 E_y + \eta\zeta E_z) \right), \\
 \zeta' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_z + \frac{\xi}{c} H_y - \frac{\eta}{c} H_x - \frac{1}{c^2} (\xi\zeta E_x + \eta\zeta E_y + \zeta^2 E_z) \right).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При решении системы уравнений (2.1) использовалась схема Рунге-Кутты с пе-

ременным шагом (схема Дормана-Принса). В качестве численного значения для следующего шага брался результат, полученный по схеме пятого порядка точности. В этом методе применяется и схема четвертого порядка для управления шагом интегрирования. Эта схема отличается от большинства схем с переменным шагом интегрирования тем, что в качестве решения берется результат, полученный по схеме более высокого порядка, а шаг по времени задается с помощью схемы более низкого порядка. В таблице 2.1 представлена таблица Бутчера данного метода.

Таблица 2.1: Таблица Бутчера для метода Дормана-Принса.

0							
$\frac{1}{5}$	1						
$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{9}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{40}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{4843}{1458}$	$-\frac{3170}{243}$	$\frac{8056}{729}$	$-\frac{53}{162}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
4-й порядок:	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$
5-й порядок	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0

## Метод Particle-in-cell (PIC).

В данной работе основные результаты получены с помощью метода Дормана-Принса. Метод PIC используется для тестирования решения и сравнения с методом Дормана-Принса. Кроме того, написанная на языке C++ программа для моделирования с помощью метода PIC также может быть использована при моделировании движения частиц и распространения электромагнитных волн в сплошных средах. Формулы для описания метода PIC приведены в системе СИ.

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле для нерелятивистского случая:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (2.2)$$

Запишем это уравнение в разностном виде:

$$\frac{\vec{v}_{t+\Delta t/2} - \vec{v}_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_{t+\Delta t/2} + \vec{v}_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} \times \vec{B} \right). \quad (2.3)$$

Для нахождения скоростей и координат частиц Бóрисом был предложен эффективный алгоритм [122], который разбивает движение частицы на каждом шаге по времени на 3 этапа: движение на полшага под действием электрического поля, поворот за счет магнитного и продвижение еще на полшага за счет электрического. Суть метода в следующем: найти скорость через полшага по времени, меняющуюся под воздействием электрического поля, потом учесть влияние магнитного поля (поворот), потом найти изменение скорости еще через полшага по времени под действием электрического поля. Подставим

$$\vec{v}_{t-\Delta t/2} = \vec{v}^- - \frac{q\vec{E}}{m} \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.4)$$

$$\vec{v}_{t+\Delta t/2} = \vec{v}^+ + \frac{q\vec{E}}{m} \frac{\Delta t}{2}. \quad (2.5)$$

в уравнение (2.2), получим формулу, задающую поворот:

$$\frac{\vec{v}^+ - \vec{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m} (\vec{v}^+ + \vec{v}^-) \times \vec{B}. \quad (2.6)$$

Таким образом, алгоритм вычислений:

1. Найти  $\vec{v}^-$ , зная  $\vec{v}_{t-\Delta t/2}$ , то есть скорость в начале шага, пользуясь (2.4).
2. Найти  $\vec{v}^+$  по формуле (2.6).
3. Найти  $\vec{v}_{t+\Delta t/2}$ , зная  $\vec{v}^+$ , по формуле (2.5).

Второй шаг поясняет рис. 2.1.

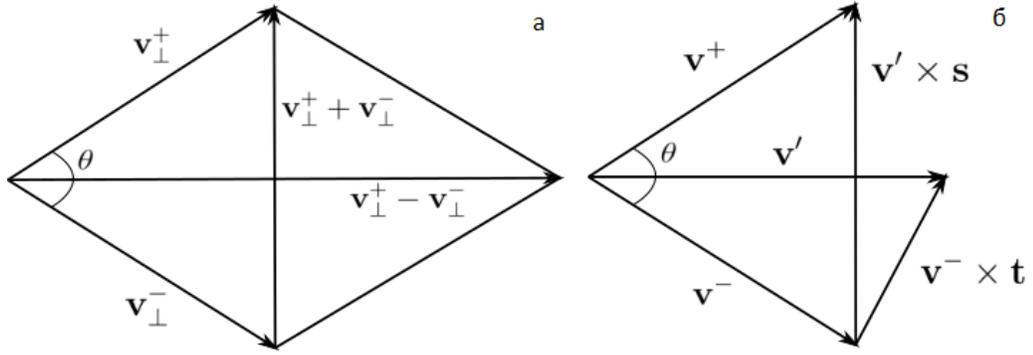


Рис. 2.1: Алгоритм Бориса.

Из рис. 2.1(а) [104] с помощью формулы (2.6) найдем:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| = \frac{|\vec{v}^+ - \vec{v}^-|}{|\vec{v}^+ + \vec{v}^-|} = \frac{q|\vec{B}|\Delta t}{2m}. \quad (2.7)$$

Далее, чтобы получить вектор  $\vec{v}^+$  из вектора  $\vec{v}^-$ , получим промежуточный вектор  $\vec{v}'$ , направленный по биссектрисе угла  $\theta$  (и, соответственно, медиане и высоте соответствующего треугольника), рис. 2.1(б):

$$\vec{v}' = \vec{v}^- + \vec{v}^- \times \vec{t}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{t}$  параллелен  $\vec{B}$ , а длина его находится из требования, чтобы  $\vec{v}'$  был направлен по биссектрисе угла  $\theta$ :

$$\vec{t} = -\vec{b} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{q\vec{B}\Delta t}{2m}, \quad (2.9)$$

где  $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ .

Теперь найдем  $\vec{v}^+$ :

$$\vec{v}^+ = \vec{v}^- + \vec{v}' \times \vec{s}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{s}$  параллелен  $\vec{B}$ .

Его длину найдем из теоремы косинусов в равнобедренном треугольнике:

$$|\vec{v}'|^2 |\vec{s}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{v}|^2 \cos \theta = 2|\vec{v}|^2 (1 - \cos \theta), \quad (2.11)$$

где  $|\vec{v}'|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{t}|^2$ .

Используем, что  $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .

Тогда получаем (опустим модули и векторы):

$$(1+t^2) s^2 = 2 \left( 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \Leftrightarrow (1+t^2) s^2 = 4 \frac{t^2}{1+t^2}, \quad (2.12)$$

Отсюда

$$\vec{s} = \frac{2\vec{t}}{1+t^2}. \quad (2.13)$$

Приведем аналогичные уравнения для релятивистского случая. Запишем (2.2) в виде:

$$\frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (2.14)$$

Введем обозначение  $\vec{u} = \gamma\vec{v}$ , тогда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}. \quad (2.15)$$

Тогда (2.14) в разностном виде (n-номер шага по времени):

$$\frac{\vec{u}^{n+1/2} - \vec{u}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left( \vec{E}^n + \frac{\vec{u}^{n+1/2} + \vec{u}^{n-1/2}}{2\gamma^n} \times \vec{B}^n \right). \quad (2.16)$$

Обозначим далее, как и в нерелятивистском случае,

$$\vec{u}^{n-1/2} = \vec{u}^- - \frac{q\vec{E}^n \Delta t}{2m}, \quad (2.17)$$

$$\vec{u}^{n+1/2} = \vec{u}^+ - \frac{q\vec{E}^n \Delta t}{2m}. \quad (2.18)$$

Подставив (2.17) и (2.18) в (2.16), получаем:

$$\frac{\vec{u}^+ - \vec{u}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2\gamma^n m} (\vec{u}^+ + \vec{u}^-) \times \vec{B}. \quad (2.19)$$

Распишем, как отсюда найти  $\vec{u}^+$  (поворот, аналогично нерелятивистскому случаю):

$$\vec{u}' = \vec{u}^- + \vec{u}^- \times \vec{t}, \quad (2.20)$$

$$\vec{u}^+ = \vec{u}^- + \vec{u}' \times \vec{s}, \quad (2.21)$$

где

$$\vec{t} = \frac{q\vec{B}\Delta t}{2\gamma^n m}, \quad (2.22)$$

$$\vec{s} = \frac{2\vec{t}}{1 + t^2}. \quad (2.23)$$

Координаты частицы на новом шаге найдем по формуле:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \vec{v}^{n+1/2} \Delta t = \vec{x}^n + \frac{\vec{u}^{n+1/2} \Delta t}{\gamma^{n+1/2}}, \quad (2.24)$$

где

$$\left(\gamma^{n+1/2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{u^{n+1/2}}{c}\right)^2. \quad (2.25)$$

Сдвинутые временные сетки позволяют получить второй порядок аппроксимации.

### **Распределение заряда частиц на сетке. Модельные частицы.**

В данном пункте рассмотрено, какой вклад в сеточную плотность заряда  $\rho$  дает каждая частица. Рассмотрим одномерный случай. Пусть размер ячейки сетки

$h$ . В модели РС вклад в плотность заряда в каждом узле дают частицы, находящиеся на расстоянии меньше  $h/2$  от узла. Пусть частица находится в точке  $x_0$ , координаты ячеек сетки  $x_i$ , где  $x_{i-1} < x_0 < x_i$ ,  $q$  - заряд частицы.

Тогда плотность заряда в ближайших к частице узлах

$$\rho_{i-1} = \frac{q}{h} \left(1 - \frac{x_0 - x_{i-1}}{h}\right) = \frac{q}{h} \frac{x_i - x_0}{h}, \quad (2.26)$$

$$\rho_i = \frac{q}{h} \left(1 - \frac{x_i - x_0}{h}\right) = \frac{q}{h} \frac{x_0 - x_i}{h}.$$

Аналогично, в двумерном случае

$$\rho_{i,j} = \frac{q}{h_x h_y} \frac{x_0 - x_{i-1}}{h_x} \frac{y_0 - y_{j-1}}{h_y}, \quad (2.27)$$

где  $x_{i-1} < x_0 < x_i$ ,  $y_{j-1} < y_0 < y_j$ ,  $h_x$  - размер ячейки по ОХ,  $h_y$  - размер ячейки по ОУ.

Данный метод имеет второй порядок аппроксимации [67]:

$$\delta_a \leq \left( \frac{3\rho^2}{2\rho_{min}} + h \frac{\rho^2 \rho_{max}}{6\rho_{min}^3} \max_x \left| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right| \right) \frac{1}{\bar{n}^2} + \frac{h^2}{12} \max_x \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|, \quad (2.28)$$

где  $\bar{n}$  - среднее число частиц в ячейке,

$\rho_{max}$  и  $\rho_{min}$  - максимальная и минимальная плотности заряда.

### Уравнение непрерывности в методе частиц-в-ячейке.

Пусть  $x_s, y_s, z_s$  - координаты частицы в начале шага,  $x_e, y_e, z_e$  - в конце шага,  $\Delta x = x_e - x_s$ ,  $\Delta y = y_e - y_s$ ,  $\Delta z = z_e - z_s$  - приращения соответствующих координат.

Запишем выражения для нахождения токов, гарантирующие то, что будет выполняться уравнение непрерывности [127]. Токи в двумерном случае можно найти по формулам:

$$j_{x,i+1/2,j}^{m+1/2} = q \frac{\Delta x}{\tau} (1 - \delta_y), \quad (2.29)$$

$$j_{x,i+1/2,j+1}^{m+1/2} = q \frac{\Delta x}{\tau} \delta_y, \quad (2.30)$$

$$j_{y,i,j+1/2}^{m+1/2} = q \frac{\Delta y}{\tau} (1 - \delta_x), \quad (2.31)$$

$$j_{y,i+1,j+1/2}^{m+1/2} = q \frac{\Delta y}{\tau} \delta_x, \quad (2.32)$$

$$j_{z,i,j}^{m+1/2} = qv_z^{m+1/2} \left( (1 - \delta_x)(1 - \delta_y) + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right), \quad (2.33)$$

$$j_{z,i,j+1}^{m+1/2} = qv_z^{m+1/2} \left( (1 - \delta_x)\delta_y - \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right), \quad (2.34)$$

$$j_{z,i+1,j+1}^{m+1/2} = qv_z^{m+1/2} \left( \delta_x \delta_y + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right), \quad (2.35)$$

$$j_{z,i+1,j+1}^{m+1/2} = qv_z^{m+1/2} \left( \delta_x \delta_y + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right), \quad (2.36)$$

где

$$\delta_x = \frac{1}{h_x} \left( \frac{x_s + x_e}{2} - x_{i+1/2} \right), \quad (2.37)$$

$$\delta_y = \frac{1}{h_y} \left( \frac{y_s + y_e}{2} - y_{i+1/2} \right).$$

Полученные уравнения также имеют второй порядок аппроксимации [106] благодаря сдвинутым временным сеткам.

## 2.2 Тестирование решений конечно-разностных уравнений движения заряженной частицы в плоской электромагнитной волне, полученных методами Дормана-Принса и РС по данным аналитического решения.

Проведем сопоставление траектории электрона в плоской электромагнитной волне, полученной с помощью численного моделирования методами Дормана-Принса и РС, с аналитическим результатом.

Возьмем следующие начальные условия:  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ ,  $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ ,  $E_y = E_z = H_x = H_y = 0$ .

Поля зададим следующим образом (волна распространяется вдоль оси  $OY$ ):

$$E_x = -H_z = E_0 \sin(\omega_0 t - ky - \pi/2).$$

На рис. 2.2 изображена траектория электрона, полученная решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью метода Дормана-Принса. Данная траектория получена в лабораторной системе отсчета. В системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится, траектория будет иметь форму восьмерки [3], рис. 2.4.

Расчеты выполнялись при следующих значениях:  $\omega_0 = 10^6$  рад/с,  $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$  г,  $q = -4.8 \cdot 10^{-10}$  Фр,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с,  $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.

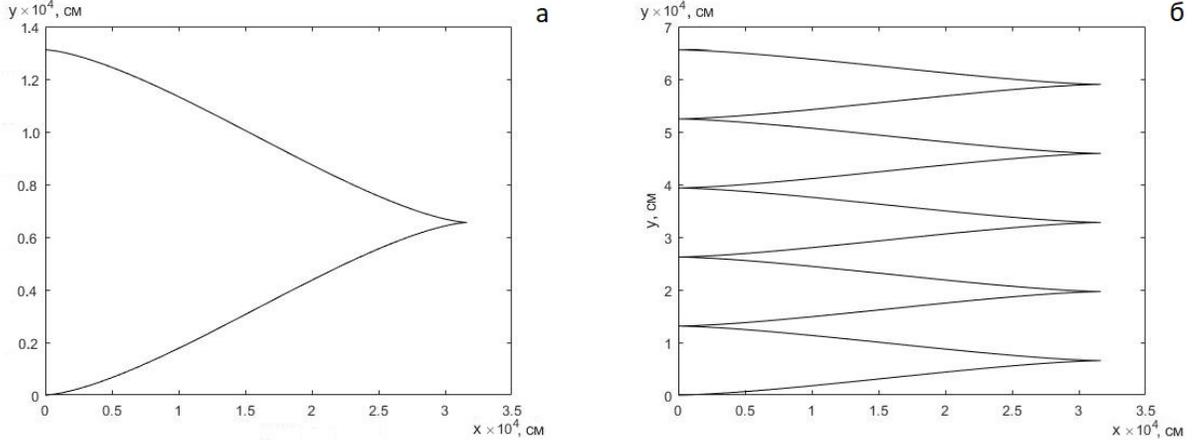


Рис. 2.2: Траектория электрона в поле плоской электромагнитной волны: решение по методу Дормана-Принса.  $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$  г,  $q = -4.8 \cdot 10^{-10}$  Фр,  $E_y = E_z = H_x = H_y = 0$ ,  $E_x = -H_z = E_0 \sin(\omega_0 t - kz - \pi/2)$ ,  $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\omega_0 = 10^6$  рад/с,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . Время: а)  $t = 0.7 \cdot 10^{-5}$  с . б)  $t = 3.5 \cdot 10^{-5}$  с.

Для верификации работы программы сравним траекторию заряженной частицы в плоской волне, найденную с помощью метода Дормана-Принса, с аналитическим решением (аналогичным полученному, например, в [5]):

$$x = x_0 + \frac{q}{m} \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \int_{\tau_0}^{\tau'} E_x(\tau') d\tau' \right) d\tau'',$$

$$y = y_0 + \frac{q^2}{2m^2 c} \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \int_{\tau_0}^{\tau'} E_x(\tau') d\tau' \right)^2 d\tau''.$$

Далее положим, что  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ . Поле  $E_x = E_0 \sin \omega_0 \tau$ . Тогда

$$x = \frac{q}{m} \int_0^{\tau} \left( \int_0^{\tau'} E_0 \sin \omega_0 \tau' d\tau' \right) d\tau'' = \frac{qE_0}{m\omega^2} (\eta - \sin \eta), \quad (2.38)$$

$$y = \frac{q^2}{2m^2 c} \int_0^{\tau} \left( \int_0^{\tau'} E_0 \sin \omega_0 \tau' d\tau' \right)^2 d\tau'' = \frac{E_0^2 q^2}{2m^2 c \omega_0^2} \int_0^{\tau} (1 - \cos \omega_0 \tau'')^2 d\tau'' =$$

$$= \frac{E_0^2 q^2}{m^2 c \omega_0^3} (0.75\eta - \sin \eta + 0.125 \sin 2\eta), \quad (2.39)$$

где  $\eta = \tau\omega_0$ .

Если вместо  $\sin \eta$  взять  $\sin(\eta + \Phi)$ , уравнения для координат будут:

$$x = \frac{qE_0}{m\omega_0^2} (\eta \cos \Phi + \sin \Phi - \sin(\eta + \Phi)), \quad (2.40)$$

$$y = \frac{E_0^2 q^2}{m^2 c \omega_0^3} (0.5(\cos^2 \Phi + 0.5)\eta - \cos \Phi \sin(\eta + \Phi) + 0.125 \sin(2\eta + 2\Phi)).$$

График аналитического решения показан на рис. 2.3. Как можно видеть, траектории, полученные аналитически и с помощью метода Дормана-Принса, совпадают.

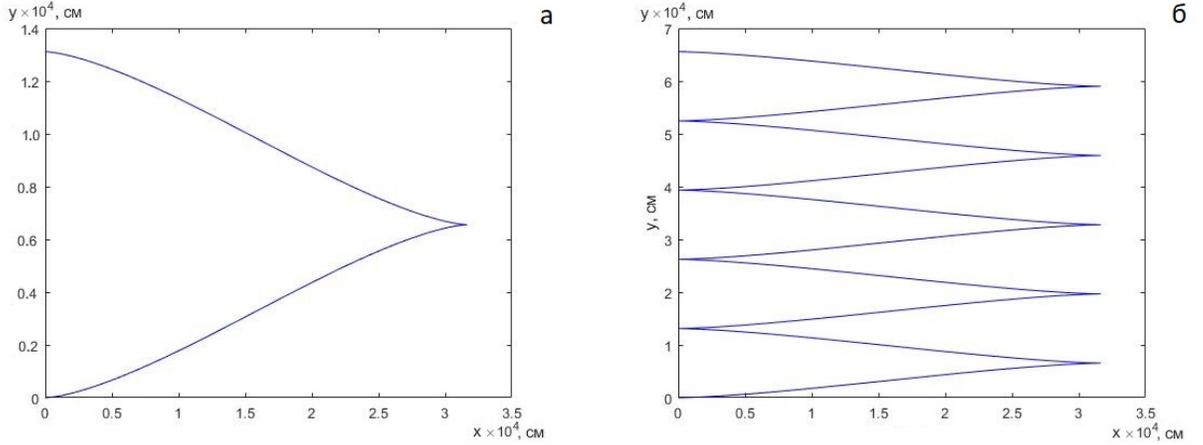


Рис. 2.3: Траектория электрона в поле плоской электромагнитной волны: аналитическое решение.  $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$  г,  $q = -4.8 \cdot 10^{-10}$  Фр,  $E_y = E_z = H_x = H_y = 0$ ,  $E_x = -H_z = E_0 \sin(\omega_0 t - kz - \pi/2)$ ,  $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\omega_0 = 10^6$  рад/с,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . а)  $t = 0.7 \cdot 10^{-5}$  с . б)  $t = 3.5 \cdot 10^{-5}$  с.

Сопоставление результатов расчета, представленных на рис. 2.2 и 2.3 показывает полное совпадение расчетов по методу Дормана-Принса и аналитического решения. Траектория, построенная методом РС, хорошо согласуется с аналитическим решением, полученным на рис. 2.3.

В [3] доказано, что в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится, частица движется по симметричной 8-образной траектории. На рис. 2.4(а) изображена траектория электрона в лабораторной системе координат, а на рис. 2.4(б) – в системе координат, в которой электрон в среднем покоится. Как можно видеть, траектория на рис. 2.4(б) – восьмерка. Траектория рассчитана численно с помощью метода Дормана-Принса. Рис. 2.4(б) получен последовательным вычитанием из точек рис. 2.4(а) расстояния, равного произведению средней скорости частицы за период на соответствующее точке траектории время [21]. Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{q^2 E_0^2}{4m^2 c \omega_0^2}, \quad (2.41)$$

где  $E_0$  – амплитуда электрического поля,  $\omega_0$  – несущая частота волны,  $q$  – заряд частицы,  $m$  – масса частицы,  $c$  – скорость света. Траектория получилась похожей на восьмерку, что подтверждает совпадение численных расчетов с теорией [3].

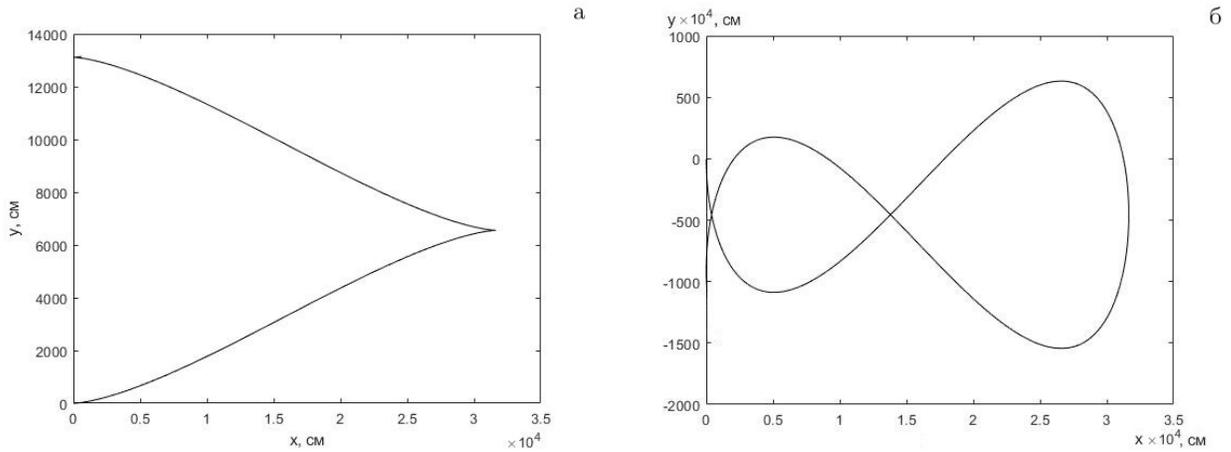


Рис. 2.4: Траектория электрона в поле плоской электромагнитной волны.  $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$  г,  $q = -4.8 \cdot 10^{-10}$  Фр,  $E_y = E_z = H_x = H_y = 0$ ,  $E_x = H_z = E_0 \sin(\omega_0 t - kz - \pi/2)$ ,  $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\omega_0 = 10^6$  рад/с,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . а) в лабораторной системе отсчета, б) в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится.

Сопоставим зависимость дрейфа заряженной частицы от начальной фазы в плоской электромагнитной волне, полученную в результате численных расчетов, с аналитическим решением. Численные расчеты при  $\Phi = -\frac{\pi}{2}$  (рис. 2.2) показы-

вают отсутствие дрейфа по направлению электрического поля, что совпадает с результатами работы [21]. В случае другого значения фазы, кроме  $\frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), дрейф есть. На рис. 2.5 изображена траектория электрона в поле плоской волны при значениях фазы а)  $\Phi_0 = \pi$ , б)  $\Phi_0 = 4\pi/3$ . Результаты, представленные на рис. 2.4, 2.5 показывают хорошее совпадение численного решения с аналитическим.

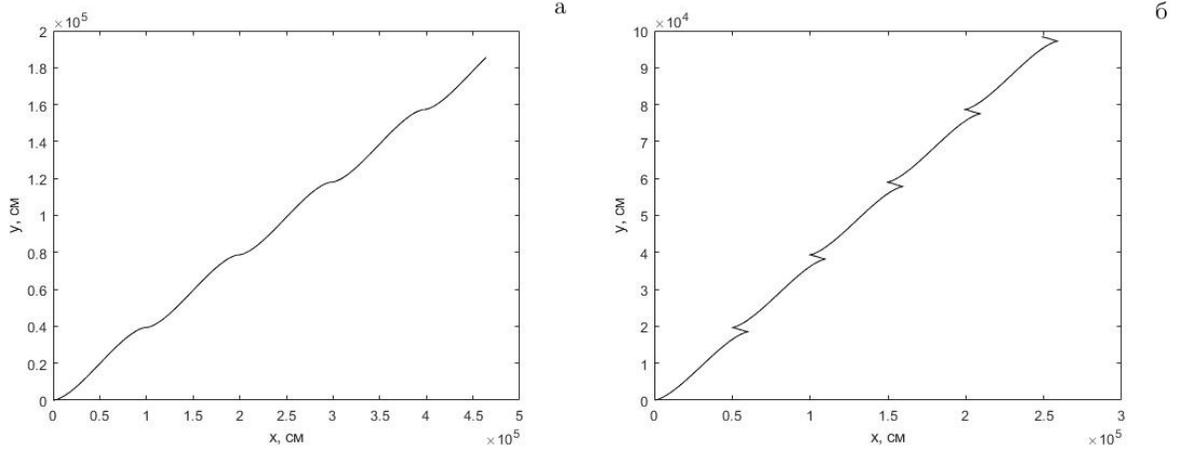


Рис. 2.5: Траектория электрона в поле плоской электромагнитной волны при различных значениях начальной фазы.  $E_y = E_z = H_x = H_y = 0$ ,  $E_x = H_z = E_0 \sin(\omega_0 t - kz + \Phi_0)$ ,  $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\omega_0 = 10^6$  рад/с,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ . а)  $\Phi_0 = \pi$ , б)  $\Phi_0 = 4\pi/3$ .

## 2.3 Сопоставление дрейфа электрона вдоль электрического поля, вычисленного по данным численного решения и полученного методом возмущений.

В работе [21] проводится анализ движения заряженной частицы в неоднородной, поперечно-электрической электромагнитной волне методом возмущений. Данный метод справедлив лишь при небольших отклонениях частицы от начальной точки, а также при значении параметра  $\frac{eE}{mc\omega} \ll 1$ . Однако, данный метод позволяет установить некоторые свойства движения частицы в неоднородной волне, в том числе, справедливые и для плоской волны. Одним из таких свойств является отсутствие дрейфа частицы в направлении электрического поля при значениях фазы  $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Проверим, выполняется ли данное свойство при численном моделировании по предложенному методу. Как можно видеть на рис. 2.6, дрейф электрона в направлении электрического поля (вдоль оси  $OX$ ) отсутствует при  $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi/2$ .

Из результатов численного моделирования можно сделать заключение, что при  $\Phi_1, \Phi_2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  имеет место дрейф заряженной частицы в направлении электрического поля. Это показано на рис. 2.7 для случая движения электрона в неоднородной электромагнитной волне при значениях начальной фазы  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Как будет показано ниже, величина этого дрейфа зависит также от таких параметров, как начальные координаты частицы, начальная скорость, направляющие углы неоднородной волны, амплитуда электрического и магнитного полей и несущая частота волны.

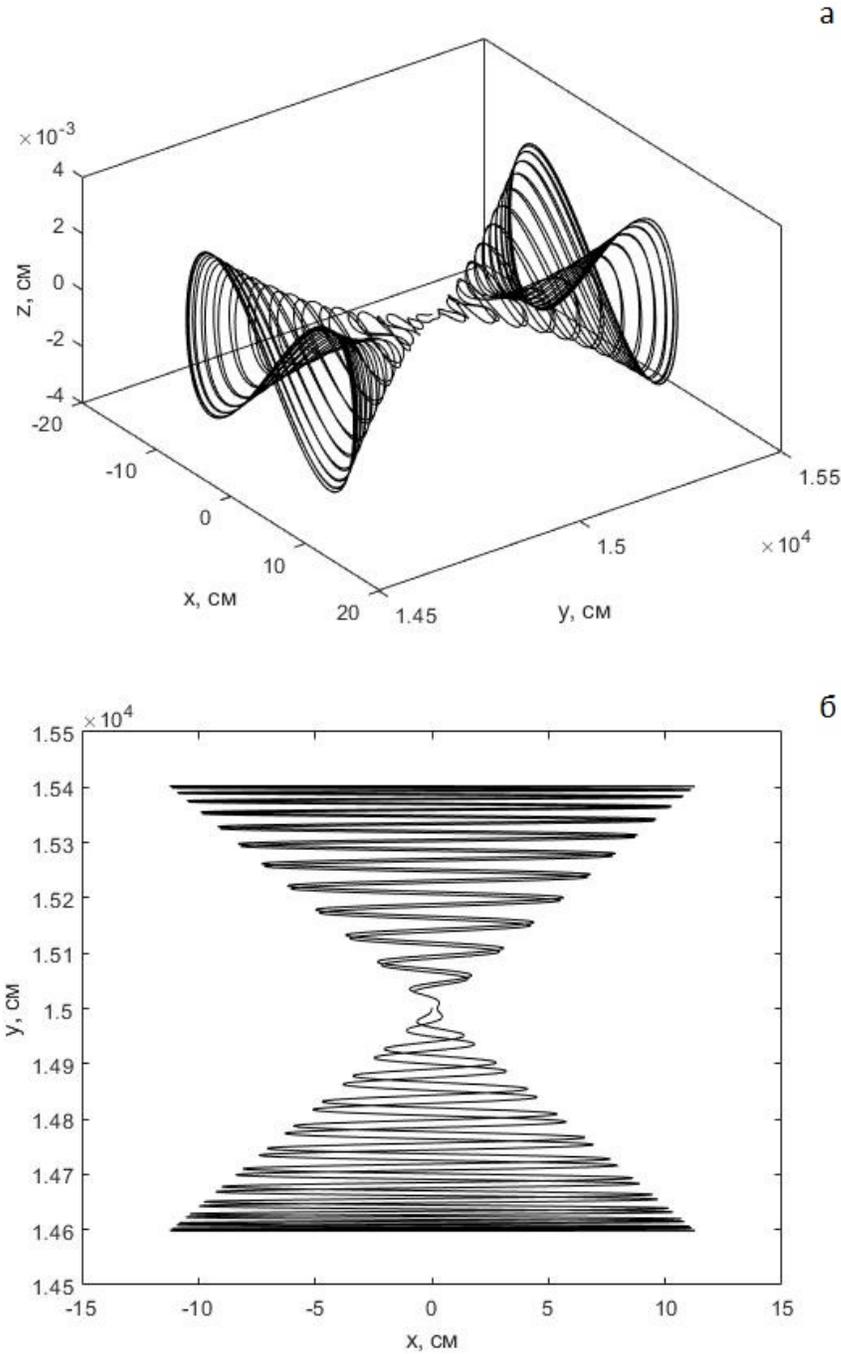


Рис. 2.6: а) Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi/2$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5001 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 5000dt$ . б) Проекция траектории на плоскость ХУ.

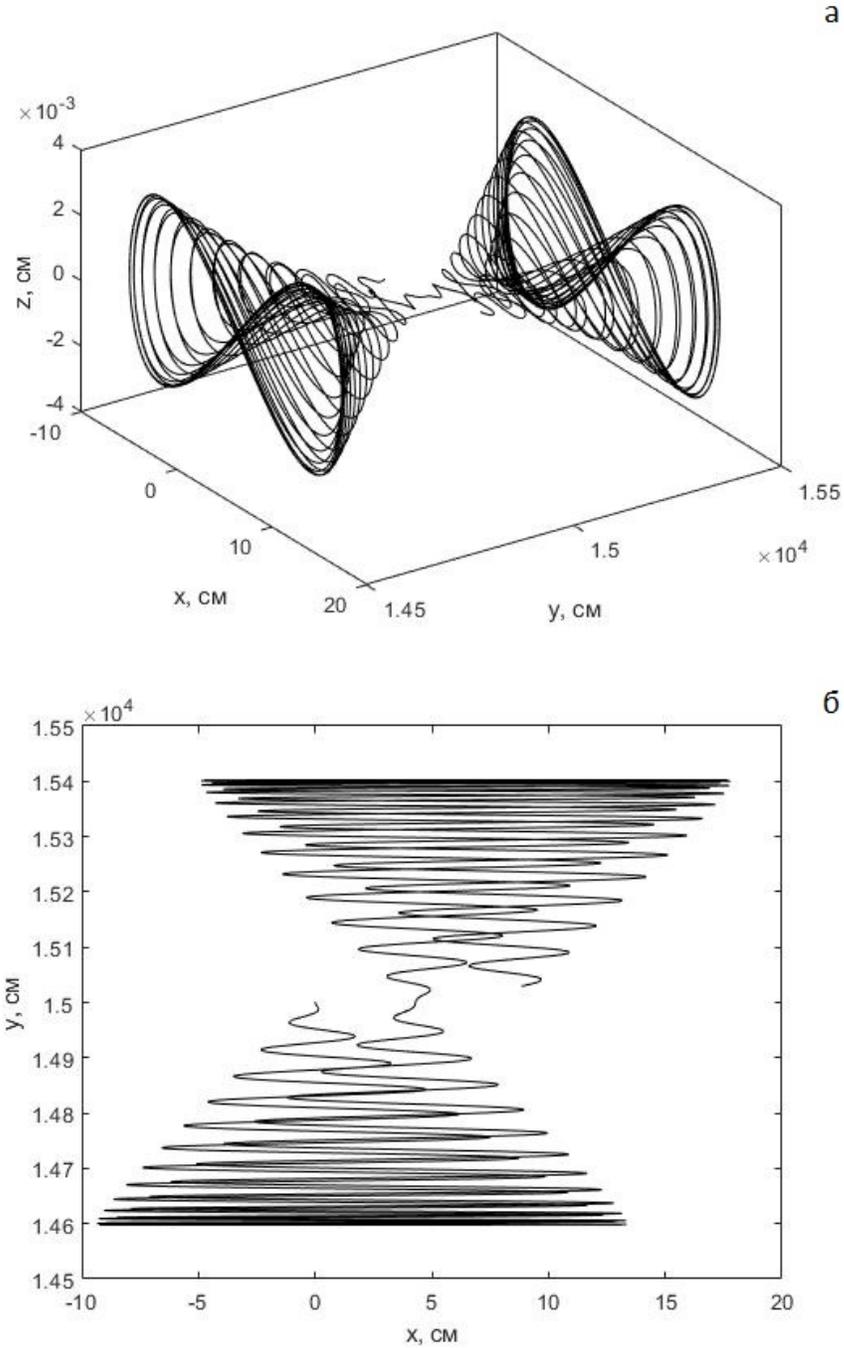


Рис. 2.7: а) Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5001 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 5000dt$ . б) Проекция траектории на плоскость ХУ.

## Глава 3

# Анализ результатов численных экспериментов по исследованию трехмерной траектории электрона в неоднородной электромагнитной волне.

### 3.1 Зависимость траектории электрона от параметров волны.

При распространении радиоволн в ионосфере необходимо учитывать микрофизические процессы взаимодействия электромагнитного поля радиоволны и заряженных компонент ионосферной плазмы, в первую очередь, наиболее динамичной компоненты – электронов. В разделе приведены результаты анализа численного решения нелинейной системы уравнений с переменными коэффициентами (1.1), описывающей движение электрона в поле неоднородной электромагнитной волны. Нахождение зависимости траектории электрона от параметров волны выполнялось с помощью численного решения системы уравнений (1.2) методом Дормана-Принса. Рассмотрим, следуя рис. 1.1 и уравнениям (1.2), случай неоднородной волны, создаваемой двумя плоскими электромагнитными волнами.

Электрические поля плоских волн в этом случае имеют вид, следуя формуле (1.2):

$$\begin{aligned}
E_x^{(1)} &= E \sin \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi - kx \cos \varphi \cos \theta_1 - ky \sin \varphi \cos \theta_1 - kz \sin \theta_1), \\
E_x^{(2)} &= E \sin \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi + kx \cos \varphi \cos \theta_1 + ky \sin \varphi \cos \theta_1 - kz \sin \theta_1), \\
E_x &= 2E \sin \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi - kz \sin \theta_1) \cos(kx \cos \varphi \cos \theta_1 + ky \sin \varphi \cos \theta_1),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{(1)} &= -E \cos \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi - kx \cos \varphi \cos \theta_1 - ky \sin \varphi \cos \theta_1 - kz \sin \theta_1), \\
E_y^{(2)} &= -E \cos \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi + kx \cos \varphi \cos \theta_1 + ky \sin \varphi \cos \theta_1 - kz \sin \theta_1), \\
E_y &= -2E \cos \varphi \sin (\omega_0 t + \Phi - kz \sin \theta_1) \cos(kx \cos \varphi \cos \theta_1 + ky \sin \varphi \cos \theta_1).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1), (3.2) следуют уравнения плоскостей нулевого электрического поля, параллельных оси  $OZ$ :

$$kx \cos \varphi \cos \theta_1 + ky \sin \varphi \cos \theta_1 = \pi (1/2 + n), n \in Z. \tag{3.3}$$

В результате взаимодействия двух плоских электромагнитных волн образуется интерференционная структура, в которой плоскости нулевого поля определяются уравнением (3.3).

Пусть электрические поля  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  параллельны оси  $OX$ , а магнитные поля и волновые вектора лежат в плоскости  $YZ$ . В этом случае  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ;  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Из формулы (3.3) следует, что плоскости нулевого электрического поля будут перпендикулярны оси  $OY$ . Если электрон инжектировать в точку с координатами  $y_0 = \frac{\lambda}{4\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}$  с ненулевой начальной скоростью, направленной вдоль оси  $OY$ , то траектория будет расположена между плоскостями, в которых достигается максимум электрического поля в интерференционной структуре. На рис. 3.1 изображена траектория электрона в неоднородной электромагнитной волне в результате решения уравнения (1.1). Электрон совершает осциллирующее движение с несущей частотой волны  $\omega_0$  по оси  $OX$ ,  $2\omega_0$  по оси  $OZ$  и  $\Omega$  по оси  $OY$ . В работе [21] представлено приближенное выражение, полученное методом возмущений, для колебаний частицы в направлении  $OY$  с частотой  $\Omega = \frac{\pi v_{0y}}{a}$ , где  $a = \frac{\lambda}{2\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}$ . В численном решении (рис. 3.1) перечисленные осцилляции (с частотами  $\omega_0, 2\omega_0$  и  $\Omega$ ) находятся в общей постановке с учетом всех физических эффектов.

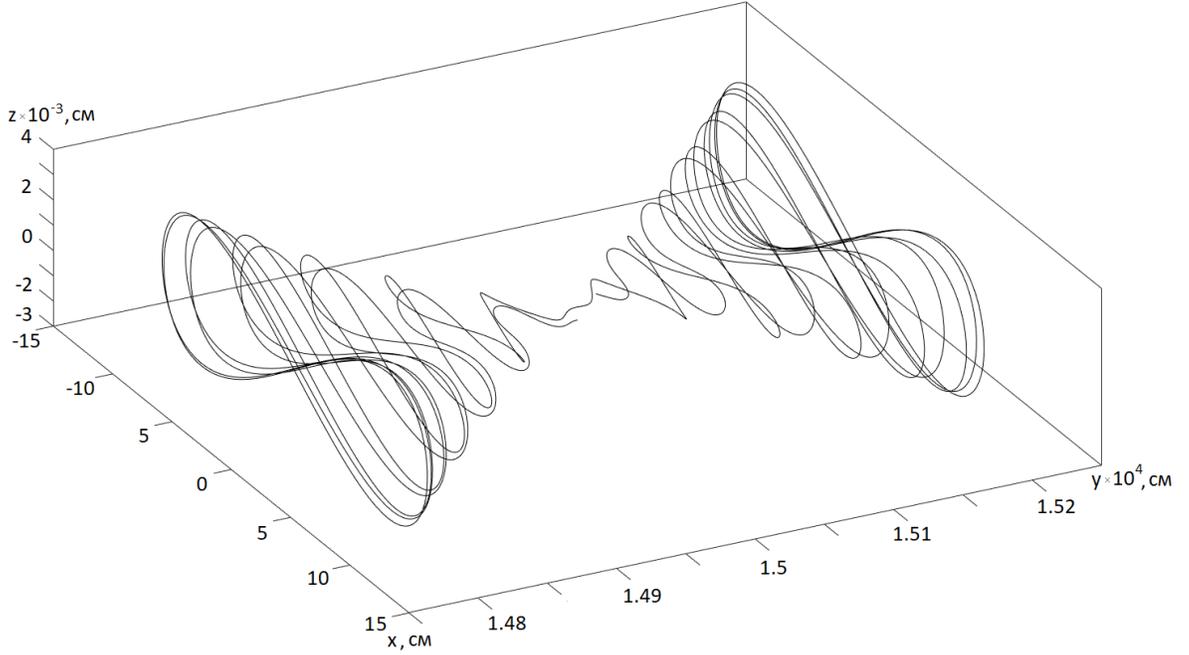


Рис. 3.1: Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны при  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (2500)dt$ .

На рис. 3.2(а) приведена траектория электрона в поле обыкновенной неоднородной электромагнитной волны. Геомагнитное поле  $\vec{B}_0$  направлено по оси  $OX$ . Траектория лежит на цилиндрической поверхности, параллельной  $OX$ . Траектория электрона в поле необыкновенной неоднородной электромагнитной волны изображена на рис. 3.2(б). Постоянное магнитное поле  $\vec{B}_0$  направлено по оси  $OY$ . Траектория электрона находится между максимумами интерференционной структуры.

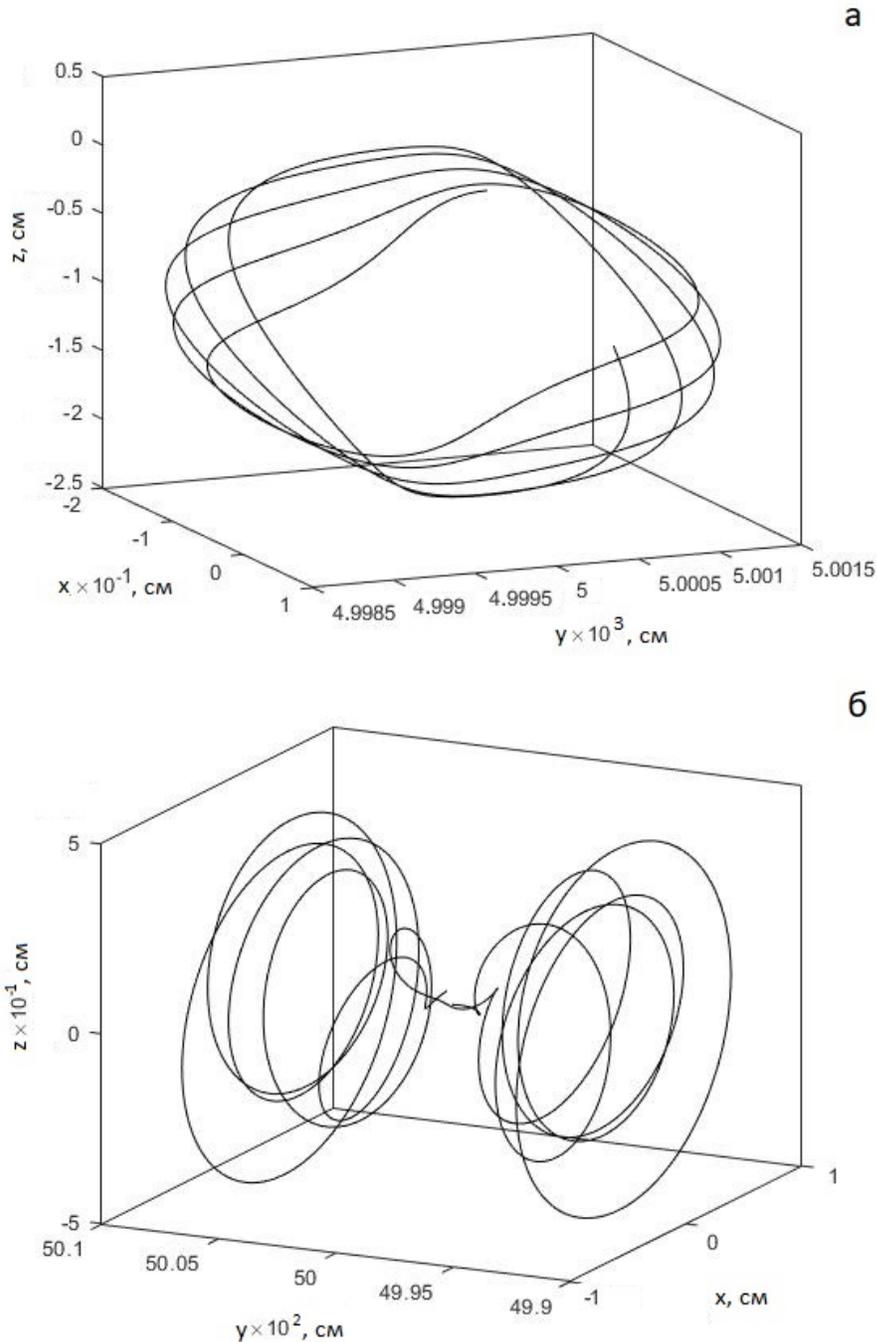


Рис. 3.2: Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны в постоянном магнитном поле  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 1340dt$ . а) Обыкновенная волна. б) Необыкновенная волна.

В разделах 3.1.1 и 3.1.2 изложены результаты исследования зависимости траектории от параметров волны: углов  $\varphi_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\psi_i$ , амплитуды электрического и магнитного полей, несущей частоты и начальной фазы.

### 3.1.1 Зависимость траектории электрона от направляющих углов.

Направляющие углы определяют структуру электромагнитной волны, а также характер движения заряженной частицы в данной волне. Условия, при которых электрон совершает периодические движения с частотой  $\Omega$ , симметричные относительно плоскости, перпендикулярной оси  $OY$ , для углов следующие:  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ,  $\psi_1 = \psi_2$ . При  $\psi_1 \neq \psi_2$  траектория станет асимметричной, что можно видеть на рис. 3.3. Асимметрия возникает в силу того, что электрические поля первой и второй волны отличаются.

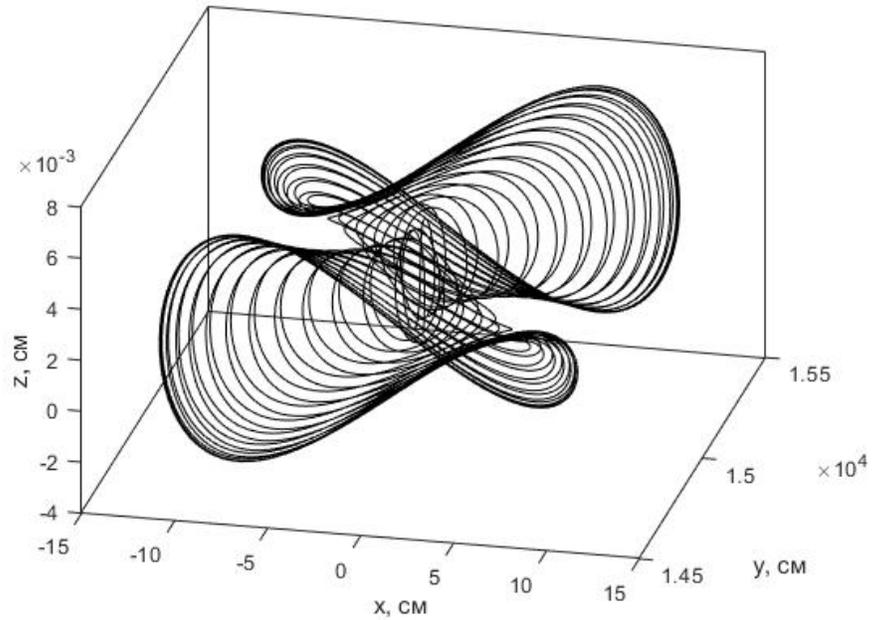


Рис. 3.3: Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны при  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; \pi/100000)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ .

При увеличении различия между углами траектория будет изменяться. Например, при  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = \pi/12$  траектория изображена на рис. 3.4. При неравенстве углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  плоскости нулевого электрического поля будут направлены под углом к оси  $OY$ , отличным от  $\pi/2$ . При  $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi$  данные плоскости не будут параллельны  $OZ$ .

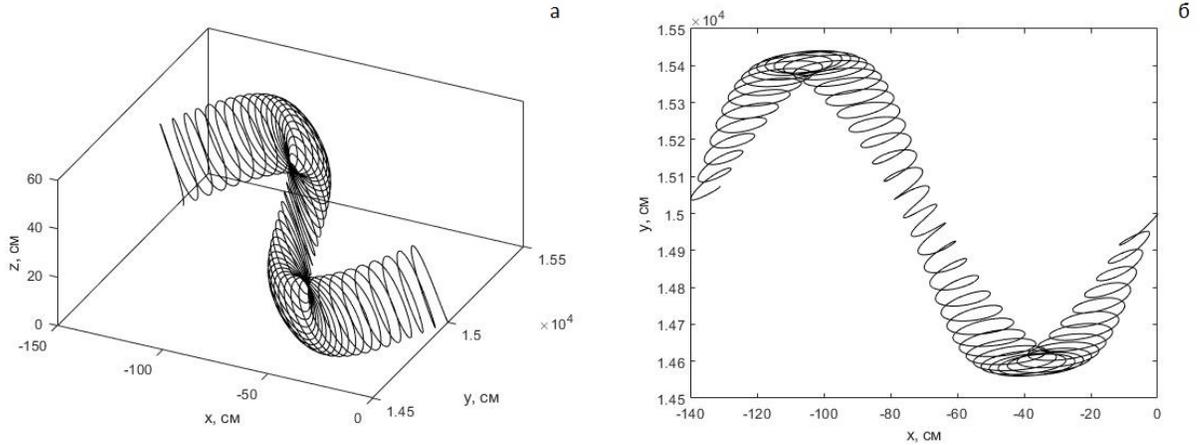


Рис. 3.4: а) Траектория электрона в поле неоднородной волны при  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; \pi/12)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ . б) Проекция траектории электрона на плоскость  $XY$ .

Как следует из уравнений (1.1) – (1.3), скорость частицы также зависит от направляющих углов. На рис. 3.5 приведена зависимость максимальной скорости электрона от углов  $\psi_1$ ,  $\theta_1$ , при старте из окрестности максимума интерференционной картины. Максимальная скорость достигает значения  $\sim 8.5 \cdot 10^9$  см/с, при значении  $\psi_1 = 60^\circ$ ,  $\theta_1 \sim 80^\circ$ . Наименьшее значение скорости электрона достигается при углах  $\psi_1, \theta_1$ , удовлетворяющих условию  $\psi_1 = 90^\circ - \theta_1$ .

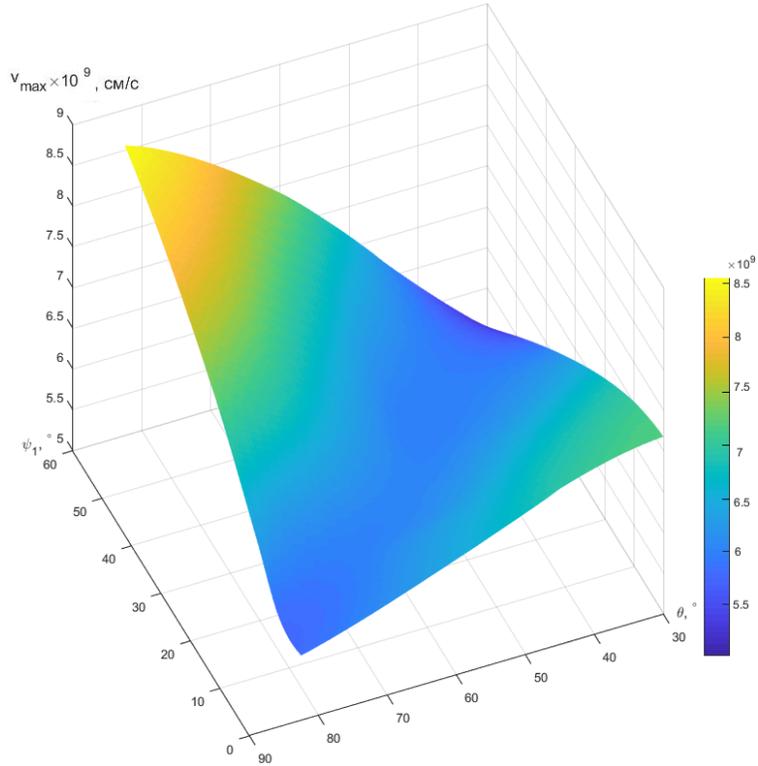


Рис. 3.5: Зависимость максимальной скорости электрона от углов  $\psi_1, \theta_1$ .  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 2.9 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = v_{0y} = 0$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ .

### 3.1.2 Зависимость скорости электрона от амплитуды и частоты электрического поля неоднородной волны.

Как известно, распространение радиоволн в ионосфере зависит в том числе от подвижности электронов, которая определяется амплитудой электрического поля волны и упорядоченной скоростью электронов. В связи с этим представляет интерес анализ зависимости скорости электрона от параметров электромагнитной волны. Зависимость максимальной скорости электрона в течение времени  $\frac{2\pi}{\Omega}$  от амплитуды электрического поля и несущей частоты волны в случае, когда частица стартует из окрестности максимума интерференционной структуры, показана на рис. 3.6. Скорость возрастает с возрастанием поля и убыванием частоты. Рис. 3.6 показывает близкий к экспоненциальному рост максимальной скорости при значениях амплитуды электрического поля  $E_0 \sim 10^{-2}$  ед.СГС. При фиксированном значении несущей частоты рост максимальной скорости с увеличением амплитуды электрического поля стремится к линейному.

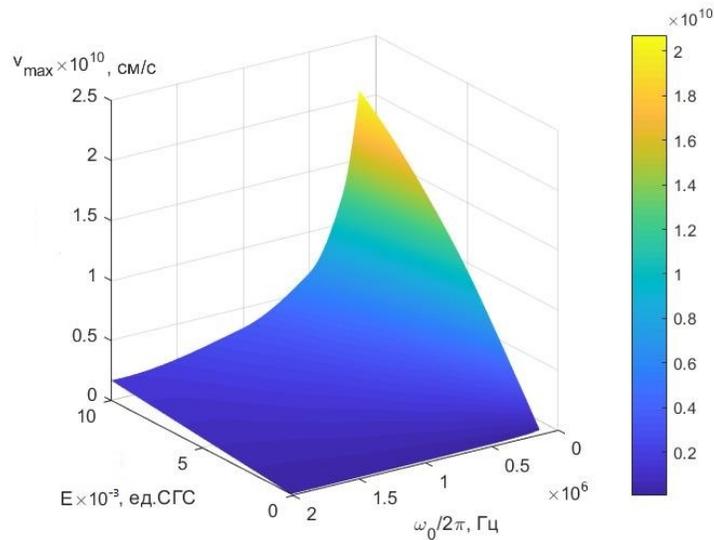


Рис. 3.6: Зависимость максимальной скорости электрона от амплитуды поля и несущей частоты.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Начальные координаты  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 2.9 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_0 = 0$  см/с, шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ .

Далее рассмотрим случай, когда частица стартует из плоскости нулевого электрического поля с некоторой начальной скоростью.

Рис. 3.7 наглядно демонстрирует увеличение скорости  $v_x$  при движении заряда от точки с координатами  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см до точки на оси  $OY$ , где  $v_y = 0$ . Положение точки на оси  $OY$ , где  $v_y = 0$ , определяется начальной скоростью и несущей частотой.

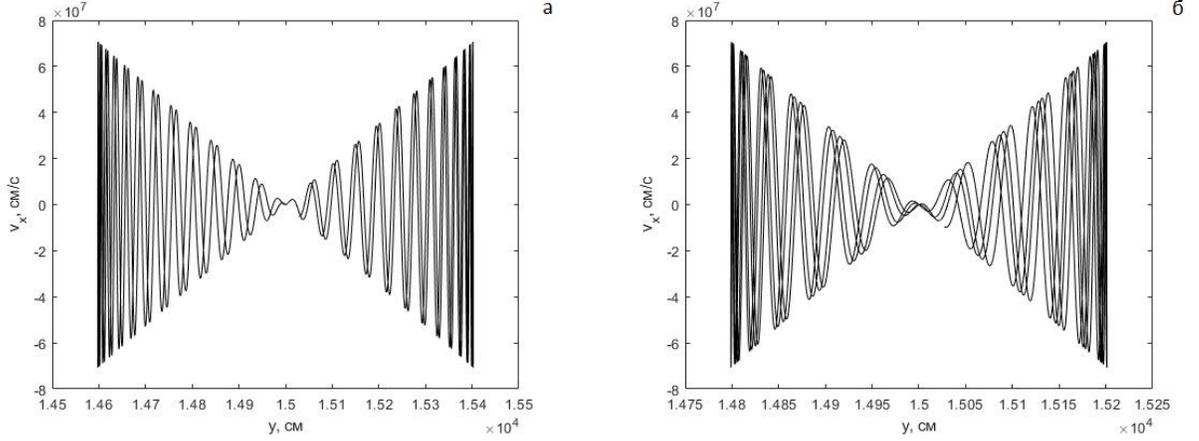


Рис. 3.7: Зависимость компоненты скорости  $v_x$  электрона в поле неоднородной волны от координаты электрона  $y$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ . Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. а)  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС., б).  $E_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.

На рис. 3.8 и 3.9 представлены результаты вычислений зависимости скорости электрона  $v_x$  и величины электрического поля  $E_x$  (в точке с координатами частицы) от времени при различных амплитудах электрического поля неоднородной электромагнитной волны. Как следует из рисунков, модулирующая частота  $\Omega$  увеличивается с увеличением амплитуды электрического поля  $E_0$ . Максимальная же скорость электрона в данном численном эксперименте незначительно меняется при увеличении амплитуды электрического поля.

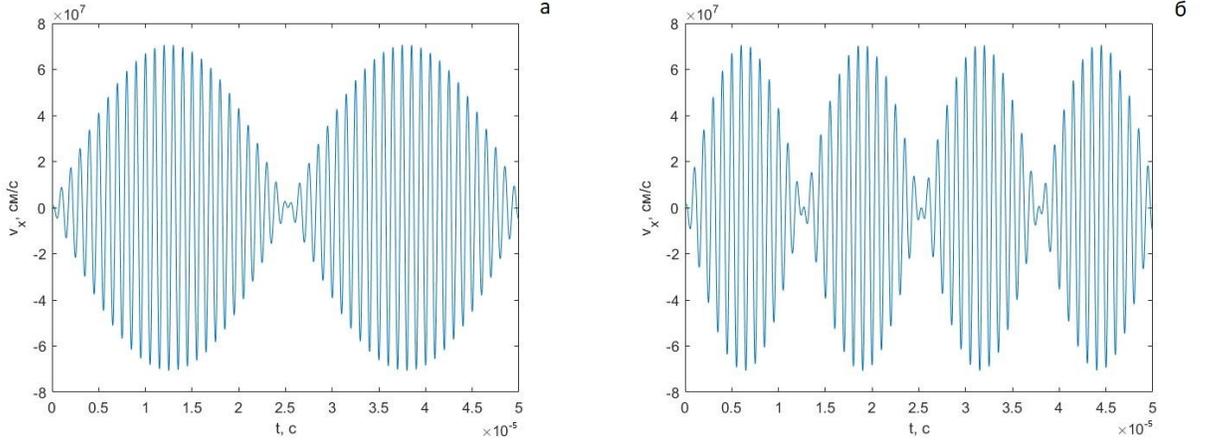


Рис. 3.8: Компонента скорости  $v_x$  электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ . Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. а)  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. б)  $E_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.

Как следует из рис. 3.9, составляющая электрического поля  $E_x$  при измерении в точке с координатами частицы, модулирована с частотой  $\Omega$ , увеличивающейся при увеличении амплитуды электрического поля  $E_0$  неоднородной электромагнитной волны.

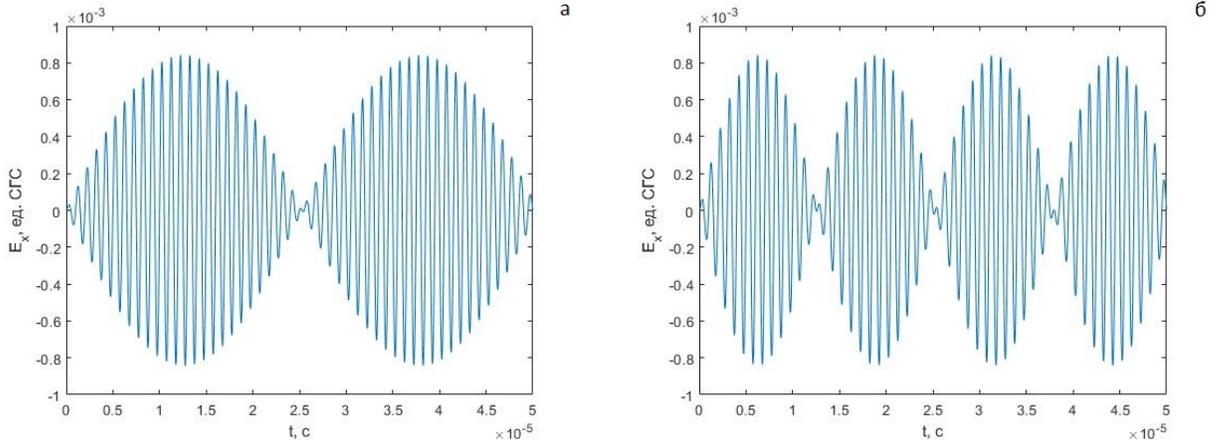


Рис. 3.9: Зависимость электрического поля в точке, в которой находится электрон в поле неоднородной волны, от времени.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ . Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. а)  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. б)  $E_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.

### 3.2 Зависимость траектории электрона от начальных координат и скорости.

Рассмотрим зависимость траектории электрона от начальных координат. Учитывая симметрию интерференционной структуры относительно оси  $OX$ , начальная координата  $x_0$  не влияет на траекторию. Выбор начальной координаты  $z_0$  влияет на значение начальной фазы, которая определяет дрейф электрона в направлении электрического поля. Этот дрейф отсутствует при значении фазы  $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi/2$ . Выявлена существенная зависимость вида траектории от начальной координаты  $y_0$ : дрейф отсутствует при  $y_0 = \frac{\lambda}{4\cos\theta_1}(1 + 2n)$ , при условии нулевых начальных скоростей по осям  $OX$  и  $OZ$ . На рис. 3.10 показана траектория электрона в случае, если начальная координата не совпадает с плоскостями нулевого электрического поля  $y_0 = \frac{\lambda}{4\cos\theta_1}(1 + 2n)$ . В этом случае имеет место дрейфовое движение частицы по оси  $OX$  а также дрейф по оси  $OZ$  (рис. 3.10).

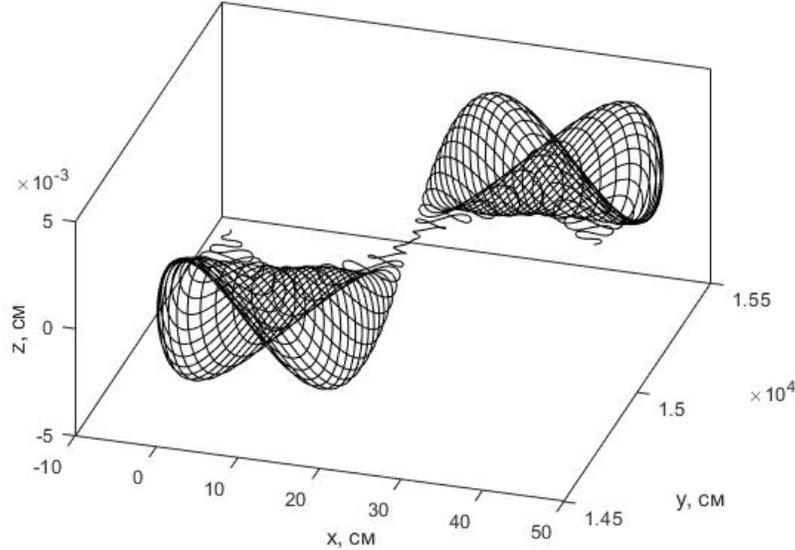


Рис. 3.10: Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5005 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ .

На рис. 3.11 представлена траектория электрона при различных значениях начальной скорости. Начальная скорость влияет на фазу, в которой электрон достигнет верхней точки траектории и, соответственно, каким образом будет происходить движение обратно, до плоскости нулевого электрического поля: на рис. 3.11(а,б) движение от минимума интерференционной картины к максимуму и от максимума к минимуму близко к синфазному, а на рис. 3.11(в,г) – в противофазе.

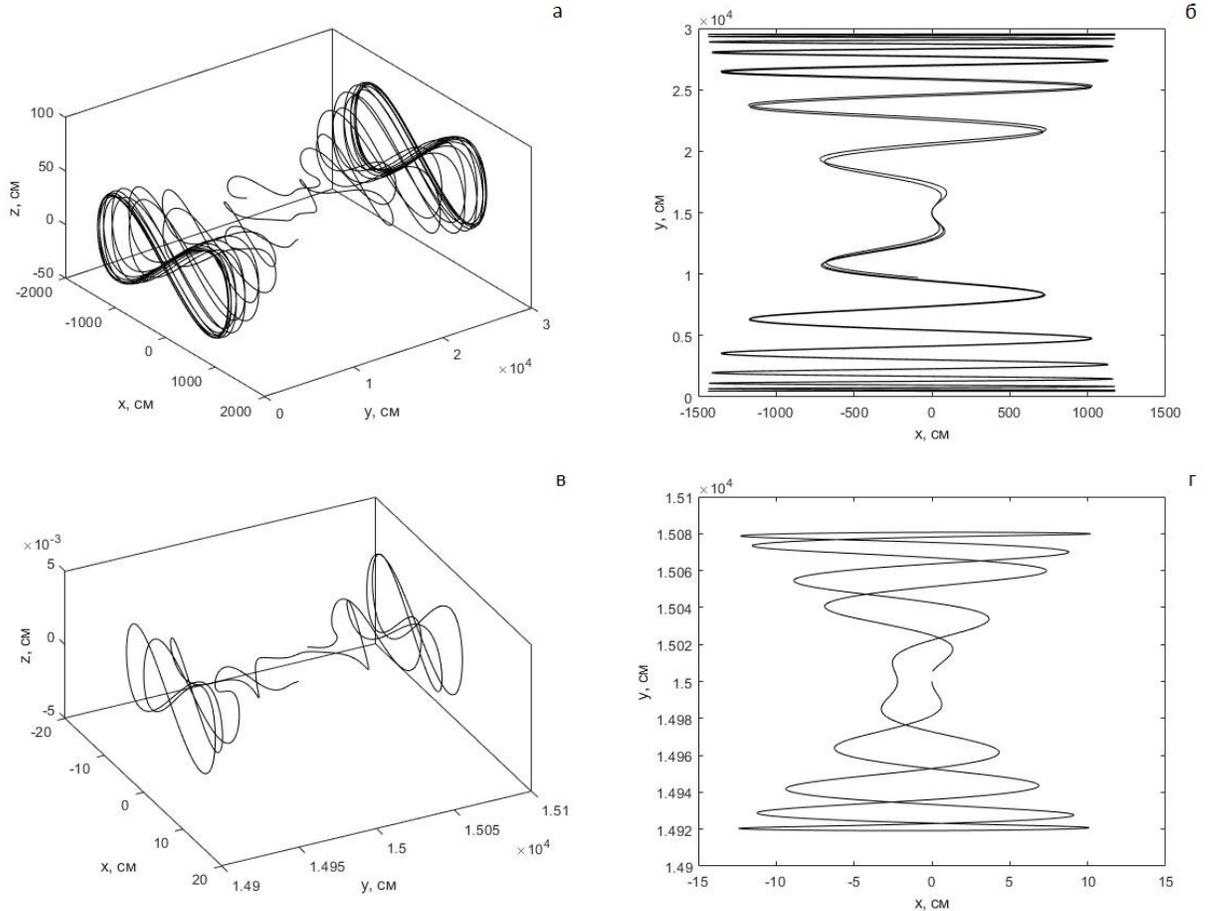


Рис. 3.11: Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. а) Траектория электрона с начальной скоростью  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.8 \cdot 10^9$  см/с, время моделирования  $T = 3000dt$ . б) Проекция траектории на плоскость XY. в) Траектория электрона с начальной скоростью  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с, время моделирования  $T = 1000dt$ . г) Проекция траектории на плоскость XY.

На рис. 3.12(а) скорость изменения амплитуды траектории в направлении ОУ до точки перегиба имеет положительную производную, а после – отрицательную, и огибающая траектории становится выпуклой. При малых скоростях (рис. 3.12(б)) электрон не долетает до точки перегиба, поэтому траектория вогнутая.

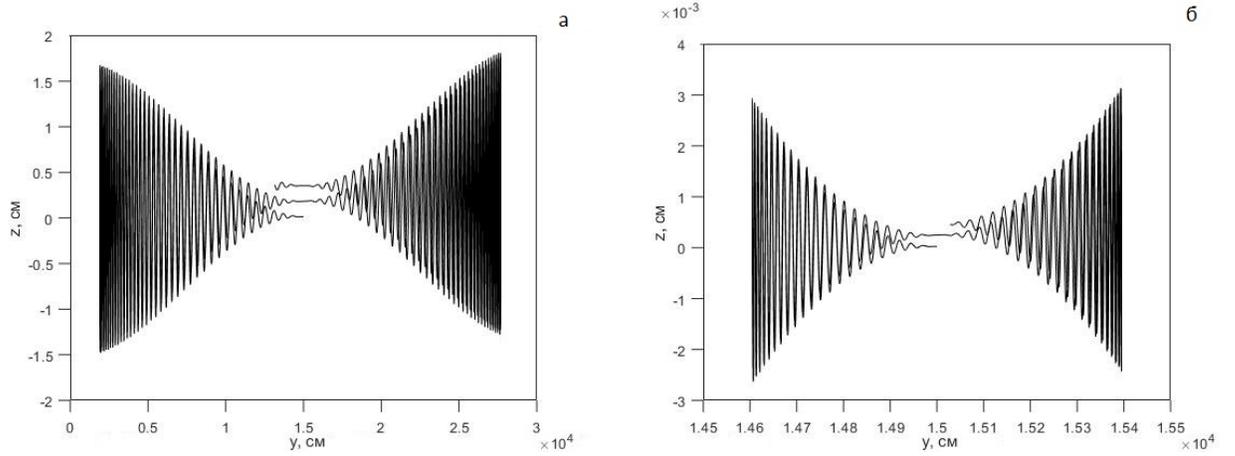


Рис. 3.12: Проекция траектории электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . а) Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -1.18 \cdot 10^9$  см/с. Время моделирования  $T = 12000dt$ . б) начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Время моделирования  $T = 5000dt$ .

При решении уравнений (1.1) необходимо учитывать следующее. В неоднородном осциллирующем электромагнитном поле возникают нелинейные явления, связанные с появлением пондеромоторных сил. В работах [25] в приближении, когда движение электрона может быть представлено как комбинация медленно меняющейся составляющей  $\vec{r}_1(t)$  и быстро осциллирующей с несущей частотой волны составляющей  $\vec{r}_2(t)$ , вводится усредненная сила, пропорциональная  $grad\langle E^2 \rangle$ , ускоряющая частицу в сторону меньшего поля и тормозящая в сторону большего поля. При низких начальных скоростях электрон не сможет преодолеть пондеромоторную силу, и его траектория будет находиться между максимумами интерференционной структуры. Условие, при котором электрон пересечет максимум линейной интерференционной структуры:

$$\frac{m\dot{r}_1^2}{2} > U(\vec{r}_1), \quad (3.4)$$

где  $U = \frac{e^2 E^2}{4m\omega_0^2}$  – пондеромоторный потенциал. Предельное значение начальной скорости  $v_{lim}$ , при которой электрон преодолевает действие пондеромоторной силы и пересечет максимум линейной интерференционной структуры, находится из (3.4) [23]:

$$v_{lim} = \frac{eE}{\sqrt{2}m\omega_0}, \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) получено при целом ряде ограничений [21] и не применимо при решении задачи в нелинейной постановке.

Сравним полученное приближенное значение пороговой начальной скорости (3.5) с результатами численного моделирования. Данный численный эксперимент поможет лучше понять суть пондеромоторной силы.

Пусть электрон стартует с начальной скоростью, направленной по оси ОУ:  $v_{0y} = -8.9 \cdot 10^9$  см/с, в точке с координатами  $(0; 1.2 \cdot 10^5; 0)$  см. Частота волны  $\omega_0 = 2\pi \cdot 1.25 \cdot 10^5$  рад/с, амплитуда электрического поля плоских волн, из которых состоит неоднородная волна,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Теоретическое значение предельной скорости, полученной из формулы (3.5):  $v_{lim} = \frac{eE}{\sqrt{2}m\omega_0} \approx 9.5 \cdot 10^9$  см/с. То есть электрон стартует в точке нулевого электрического поля со скоростью чуть ниже

предельной. Траектория электрона изображена на рис. 3.13. Траектория электрона находится между максимумами интерференционной структуры. На рис. 3.13(б) изображена проекция траектории на плоскость ХУ.

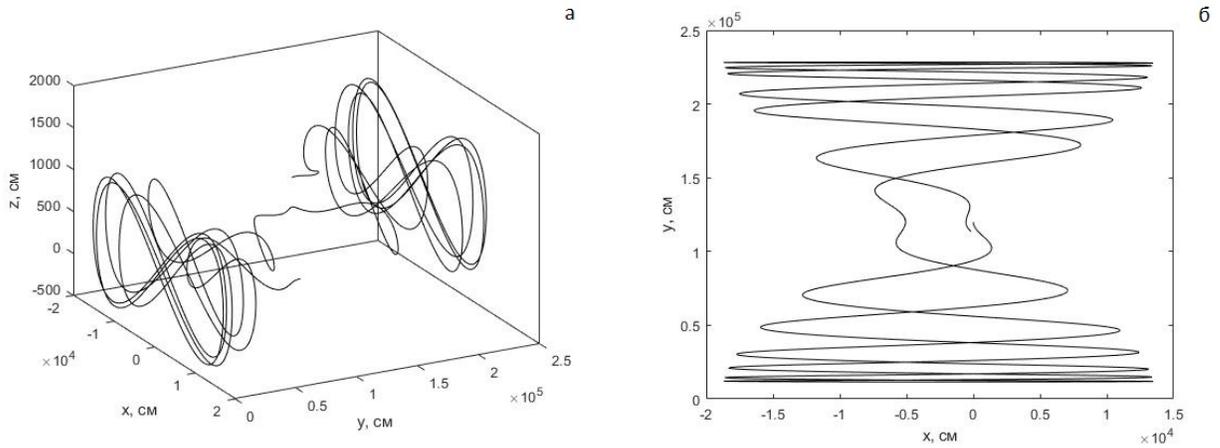


Рис. 3.13: а) Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 1.25 \cdot 10^5$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 12.0 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -8.9 \cdot 10^9$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 1400dt$ . б) Проекция траектории на плоскость ХУ.

Теперь проведем тот же эксперимент, но с начальной скоростью, превышающей предельную скорость  $v_{0y} = -9.6 \cdot 10^9$  см/с. Траектория электрона изображена на рис. 3.14.

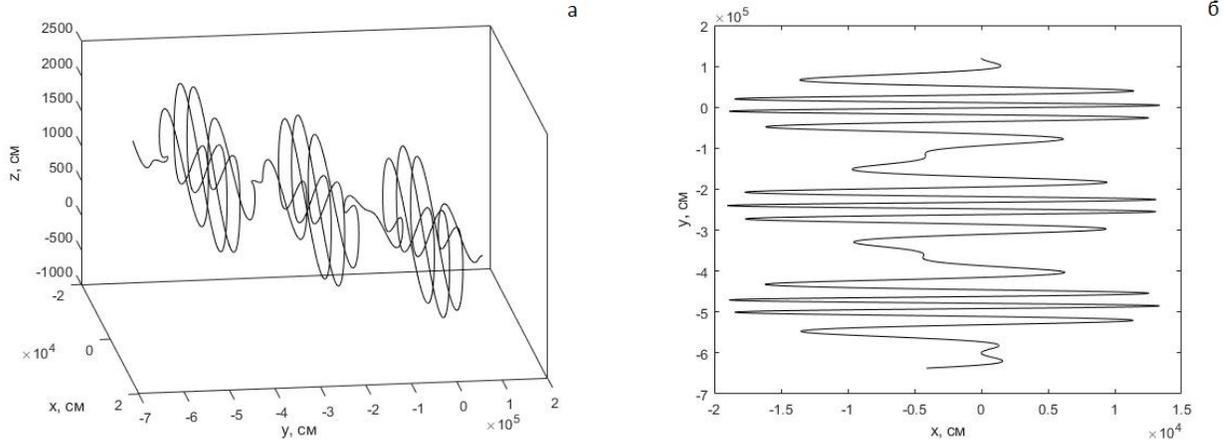


Рис. 3.14: а) Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 1.25 \cdot 10^5$  Гц,  $E_0 = 10^2$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 12.0 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -9.6 \cdot 10^9$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 1500dt$ . б) Проекция траектории на плоскость XY.

Результаты, полученные в данном разделе, показывают хорошее совпадение теоретического значения предельной скорости, полученной аналитически (3.5) [23], с результатами численного моделирования.

Таким образом, в данном разделе показано, что характер движения частицы зависит от значения начальных координат частицы: при старте не из плоскости нулевого электрического поля имеет место дрейф в случаях, когда значение начальной фазы  $\Phi \neq \frac{\pi}{2}$ . Показано, что траектория частицы будет находиться в пределах интерференционной ячейки при определенных начальных скоростях.

### 3.3 Инжекция электронов в неоднородную электромагнитную волну.

#### 3.3.1 Тестирование разработанной программы для моделирования инжекции электронов в неоднородную электромагнитную волну.

Проведем тестирование разработанного программного комплекса для моделирования инжекции электронов в неоднородную электромагнитную волну на примере плоской однородной монохроматической волны и проведем сопоставление с ранее полученными результатами. В работах [21, 22] исследовано распределение электронов, инжектированных в плоскую монохроматическую электромагнитную волну.

Следуя работам [21, 22], электрическое и магнитное поля в данной волне задаются в следующем виде:

$$E_x = E_0 \sin(\omega_0 t - ky + \Phi),$$

$$H_z = H_0 \sin(\omega_0 t - ky + \Phi),$$

$$E_y = E_z = H_x = H_y = 0,$$

где  $\omega_0$  – несущая частота,  $k$  – волновой вектор,  $\Phi$  – начальная фаза волны.

Электроны инжектируются в волну с начальной скоростью 0 см/с в точке с координатами  $(0, 0, 0)$ . Траектории электронов при разном значении начальной фазы приведены на рис. 3.15.

Как известно [3, 21], траектория электрона в поле плоской однородной волны подобна восьмерке в системе координат, в которой электрон в среднем покоится. Скорость электрона имеет две составляющие, связанные с дрейфом электрона и колебанием с несущей частотой волны. Скорость дрейфа электрона по оси, параллельной волновому вектору ( $OY$ ), всегда положительна, вне зависимости от фазы волны, при которой электрон был инжектирован. Скорость же дрейфа по

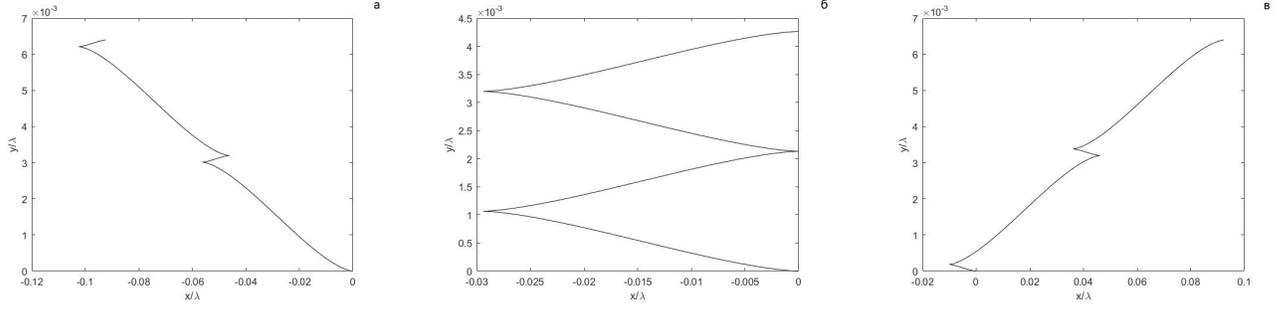


Рис. 3.15: Траектория электрона в поле плоской электромагнитной волны с амплитудой электрического и магнитного полей  $E_0 = H_0 = 0.33 \cdot 10^2$  ед.СГС, частотой  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^9$  Гц. Начальные координаты электрона:  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  см, начальная скорость – 0 см/с. Начальные фазы: а)  $\Phi = \pi/3$ , б)  $\Phi = \pi/2$ , в)  $\Phi = 2\pi/3$ . Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ , время моделирования  $T = (5000)dt$ .

оси, совпадающей с направлением электрического поля, зависит от фазы, может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Результаты моделирования на рис. 3.15 иллюстрируют это. Скорость дрейфа электрона на рис. 3.15а) по оси  $Ox$  отрицательна, на рис. 3.15(б) равна нулю, а на рис. 3.15(в) - положительна. Максимальное значение скорости дрейфа будет достигаться при  $\Phi = 0$ . В случае  $\Phi = \pi/2$  дрейф электрона по  $Ox$  отсутствует. При  $\Phi = \pi$  скорость дрейфа будет снова максимальна по модулю, но противоположна по направлению (случай  $\Phi = 0$ ). Т.о., при  $\Phi = \pi n$  скорость дрейфа по оси  $Ox$  максимальна по модулю.

Будем инжектировать электроны в плоскую монохроматическую электромагнитную волну с характеристиками, указанными в подписи к рис. 3.16.

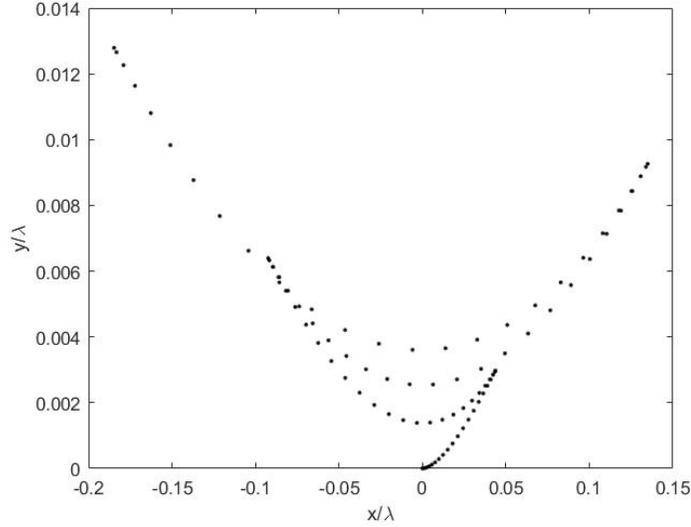


Рис. 3.16: Распределение электронов, инжектированных в плоскую электромагнитную волну с амплитудой электрического и магнитного полей  $E_0 = H_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС, частотой  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты электронов  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  см, начальная скорость  $v_0 = 0$  см/с, начальная фаза  $\Phi = 0$ . Электроны инжектируются через интервалы  $dt = 0.01T_0$  на протяжении  $2T_0$ , где  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  - период волны. Представлено распределение электронов через  $2T_0$  после инжекции первого электрона.

В распределении инжектированных электронов в поле плоской однородной монохроматической волны в плоскости XY наблюдается асимметрия, которую можно объяснить следующим образом. Первый электрон стартует, когда волна имеет фазу  $\Phi = 0$ , и через  $2T_0$  оказывается правее и выше остальных, успевает пролететь наибольшее расстояние, т.к. при  $\Phi = \pi n$  значение скорости дрейфа вдоль электрического поля является максимальным. Кроме того, при  $\Phi = \pi n$  дрейф в направлении волнового вектора является максимальным и, в отличие от дрейфа вдоль электрического поля, не меняет своего направления. Положение максимумов и минимумов в распределении инжектированных электронов определяется значением начальной фазы и временем движения электрона, которые определяют интенсивность указанных выше дрейфов. Таким образом, максимумы в распределении электронов (рис. 3.16) соответствуют значениям фазы волны  $\Phi = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

В [21] вводится параметр  $\eta = \frac{eE_0\lambda}{2\pi mc^2}$ . Физический смысл числителя - энергия,

которую электрон может набрать на длине волны  $\lambda$ . Физический смысл знаменателя - энергия покоя электрона. Подставив значения  $e$ ,  $m$ ,  $c$ , получаем  $\eta = \frac{E_0\lambda}{10^4}$ , т.е.  $\eta$  определяется амплитудой электрического поля  $E_0$  и несущей частотой волны  $\omega_0$ . В одном из численных расчетов [22]  $\eta = 0.1$ . В приведенном ниже эксперименте  $E_0$  и  $\omega_0$  подобраны таким образом, чтобы  $\eta = 0.1$ .

Следуя [22], проведем следующий эксперимент: будем инжектировать электроны в волну с промежутком  $dT = 0.01T_0$ , где  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  - период волны, в течение времени  $7T_0$ . Потом, еще через период, т.е. в момент времени  $8T_0$ , зафиксируем положение электронов. Электроны движутся в плоскости  $XU$ , т.к. электрическое поле плоской волны направлено по оси  $OX$ , а волновой вектор - по оси  $OY$ . На рис. 3.17 показано интересующее нас распределение электронов в координатах  $x/\lambda$ ,  $y/\lambda$ .

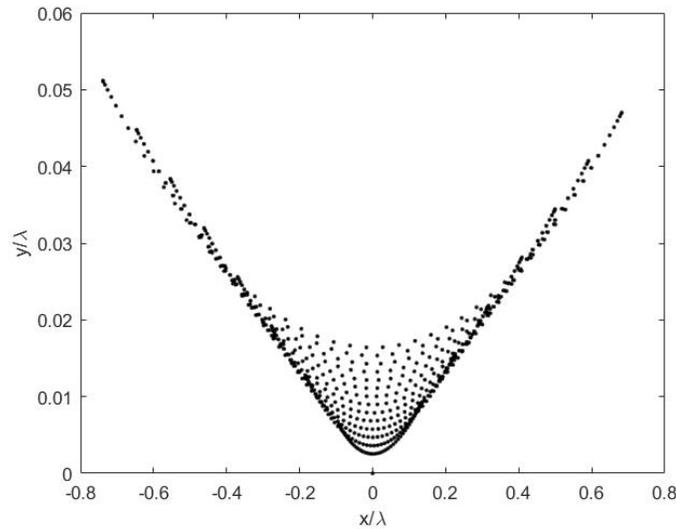


Рис. 3.17: Распределение электронов, инжектированных в плоскую электромагнитную волну с амплитудой электрического и магнитного полей  $E_0 = H_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС, частотой  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты электронов  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  см, начальная скорость  $v_0 = 0$  см/с, начальная фаза  $\Phi = 0$ . Электроны инжектируются через интервалы  $dt = 0.01T_0$  на протяжении  $7T_0$ . Представлено распределение электронов через  $8T_0$  после инъекции первого электрона, т.е. между инъекцией последнего электрона и окончанием моделирования прошел один период  $T_0$ .

Выполненное тестирование результатов численных расчетов по распределению инжектированных электронов (рис. 3.17) по данным, представленным в статье [22], показывает полное совпадение и подтверждает возможность использования разработанного программного комплекса для сложных численных расчетов.

### 3.3.2 Особенности траектории электронов в неоднородной электромагнитной волне, определяющие режимы инъекции электронов.

Перейдем к исследованию распределения инжектированных электронов в неоднородной электромагнитной волне.

Как было указано ранее, структура траектории определяется следующими параметрами: амплитуда, начальная фаза, частота волны, начальные координаты и скорости электрона, а также углами  $(\varphi_i, \theta_i, \psi_i)$ .

Ниже будет приведен ряд численных экспериментов по инъекции электронов в неоднородную электромагнитную волну. Электроны будут инжектироваться из плоскости нулевого электрического поля с ненулевой начальной скоростью, направленной по оси  $OY$ , через равные промежутки времени. После вылета последнего визуализируется положение всех электронов. Распределение электронов зависит от фазы волны, поэтому рассмотрим эволюцию траектории электрона в интерференционной структуре, образованной двумя плоскими монохроматическими волнами, в зависимости от фазы волн при заданных начальной скорости и углах.

На рис. 3.18-3.22 изображены основные типы траектории электрона в неоднородной электромагнитной волне и их проекции на плоскость  $XY$ , в зависимости от начальной фазы  $\Phi$ . Число шагов по времени  $N = 1520$ . Как следует из рис. 3.18-3.22, начальная фаза является управляющим параметром, определяющим структуру траектории электрона.

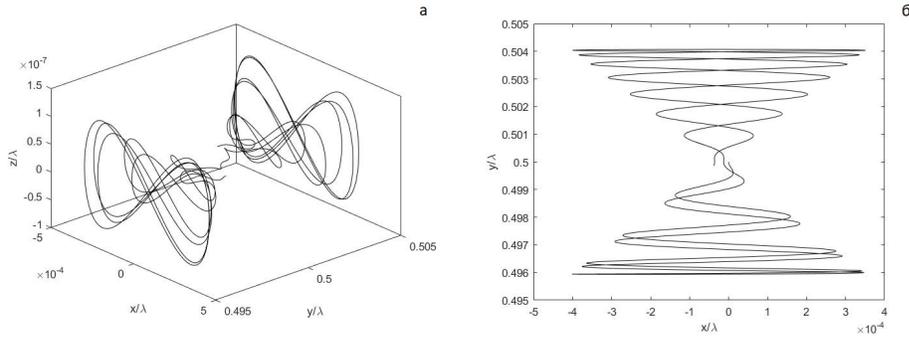


Рис. 3.18: а). Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 5^\circ$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц.  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . Время моделирования  $T = 1520dt$ . б). Проекция траектории на плоскость  $XY$ .

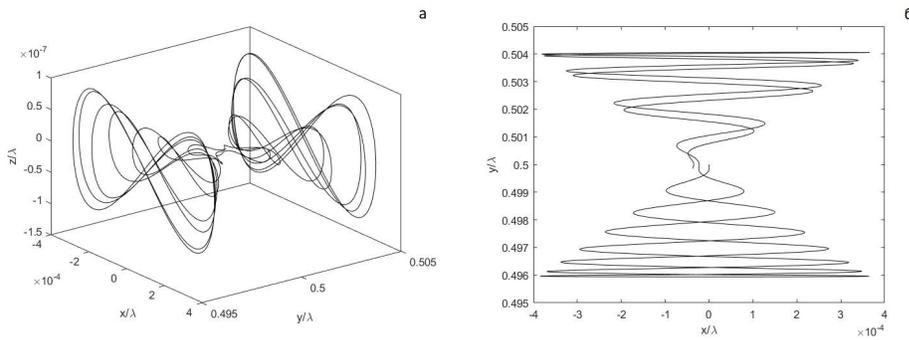


Рис. 3.19: а). Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 65^\circ$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц.  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . б). Проекция траектории на плоскость  $XY$ .

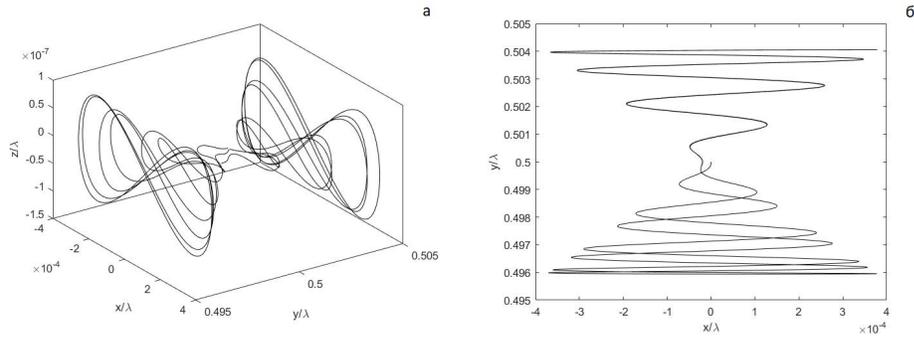


Рис. 3.20: а). Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 95^\circ$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц.  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . б). Проекция траектории на плоскость  $XY$ .

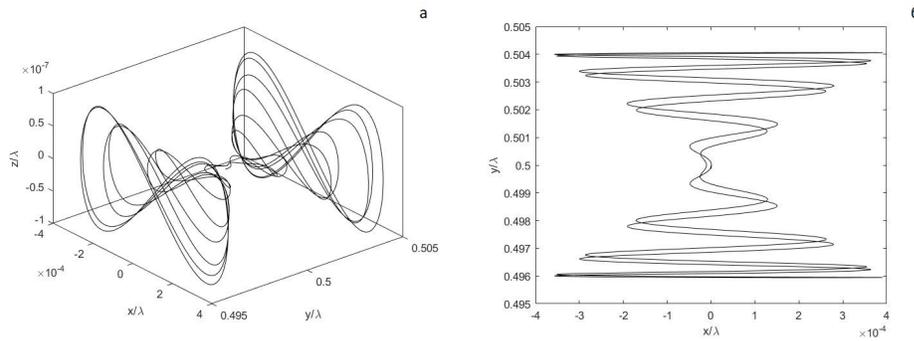


Рис. 3.21: а). Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 125^\circ$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц.  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . б). Проекция траектории на плоскость  $XY$ .

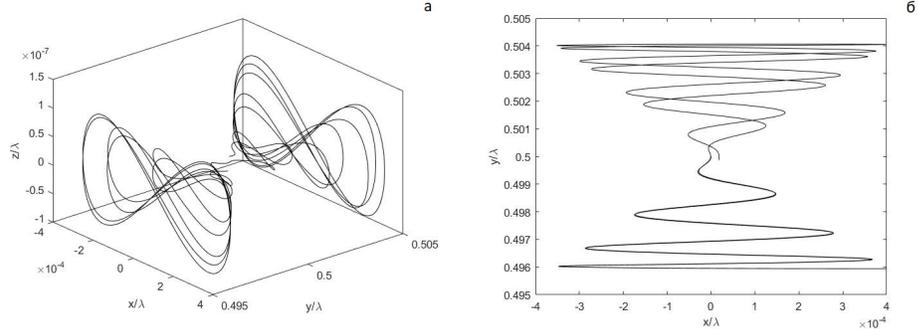


Рис. 3.22: а). Траектория электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 150^\circ$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц.  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . б). Проекция траектории на плоскость  $XU$ .

Следует отметить, что на рис. 3.21 траектория симметрична относительно плоскости нулевого электрического поля. Представленные типовые траектории электрона в поле неоднородной волны будут использованы при расчете распределения инжектированных электронов.

### 3.3.3 Распределение электронов при инжекции в неоднородную электромагнитную волну при отсутствии внешнего магнитного поля.

Проведено исследование распределения электронов при инжектировании в поле неоднородной электромагнитной волны, в том числе, обыкновенной и необыкновенной. На рис. 3.23 представлено распределение электронов, инжектированных в неоднородную электромагнитную волну. Изображенная на рисунке линейная структура является образующей конуса второго порядка, на которой находятся траектории инжектированных электронов. Вершиной данного конуса является точка инжекции. Воздействие неоднородных электромагнитных волн на плазму может сопровождаться появлением динамических образований в плазме, размеры которых определяются параметрами неоднородных электромагнитных волн.

Угол наклона к оси  $Ox$  проекции 3d-изображения распределения инжектированных электронов на плоскости  $XU$  определяется в основном начальной фазой,

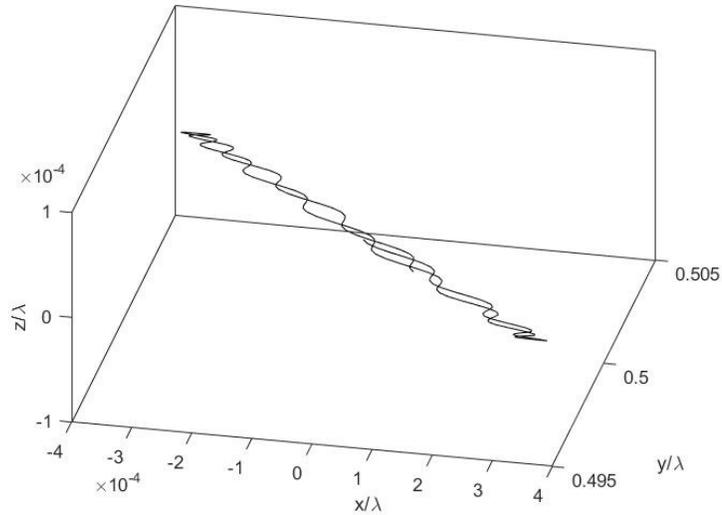


Рис. 3.23: Распределение электронов, инжектированных через равные промежутки времени в неоднородную электромагнитную волну.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Промежуток между инжектированием  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0} = 10^{-8}$ с. Координаты электронов фиксируются через время  $t = 1620dt = 1.62 \cdot 10^{-5}$ с.

являющейся управляющим параметром для определения проекции инжектированных электронов на плоскость  $XU$ . Таким образом, начальную фазу можно использовать в качестве управляющего параметра для создания режима вращения области распределения инжектированных электронов по упомянутой выше конической поверхности.

Следует отметить, что сечение конусной поверхности, в пределах которой находятся траектории инжектированных электронов, имеет соотношение масштабов по осям  $OX$  и  $OZ \sim 10^{-2}$ . В связи с этим распределение электронов колеблется практически в одной плоскости в пределах угла раствора конической поверхности.

Как можно видеть на рис. 3.24, угол поворота распределения электронов зависит от момента времени, в который фиксируется это распределение. Распределение электронов вдоль образующей конуса второго порядка (линейная структура) описывает за период волны  $100dT$  полный цикл относительно вершины конуса.

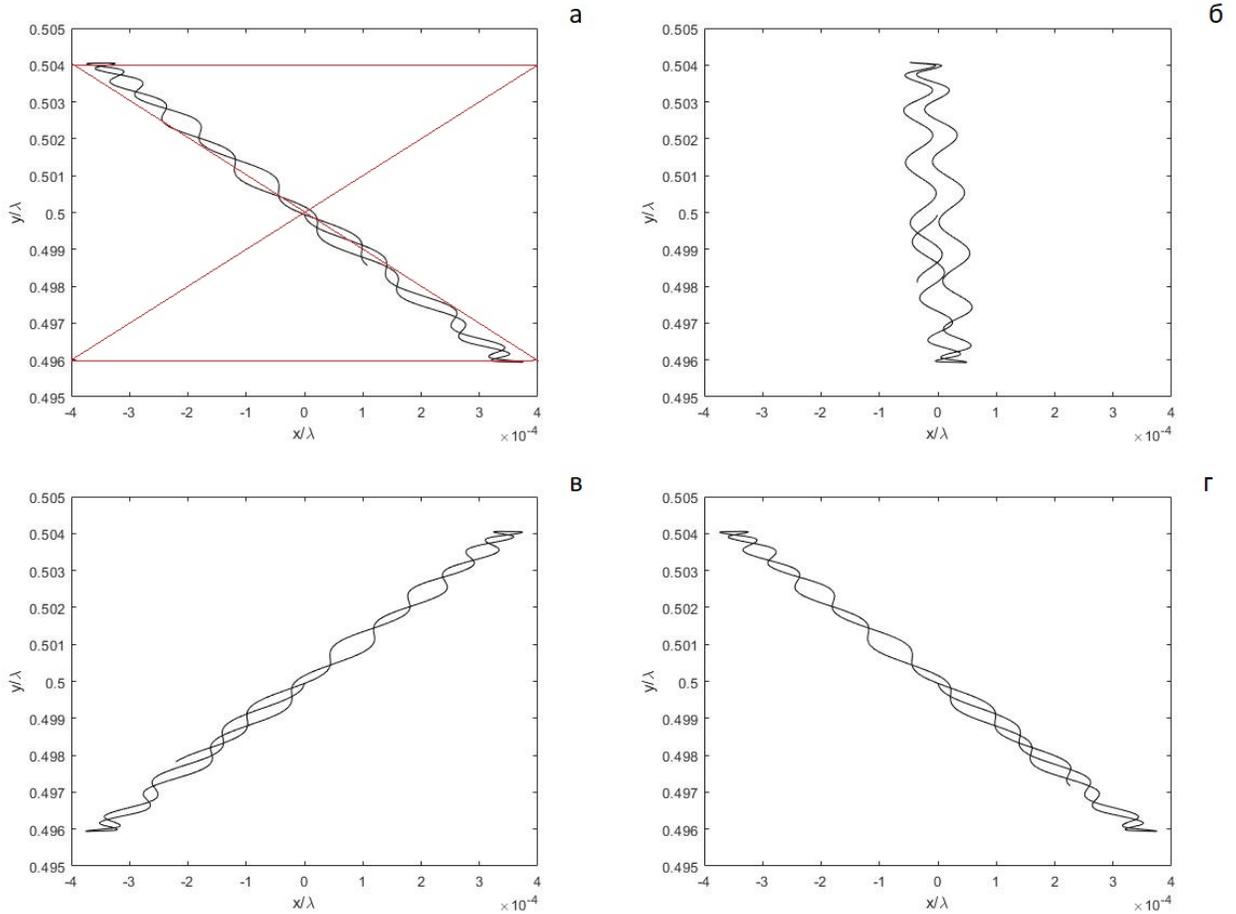


Рис. 3.24: Распределение электронов, инжектированных через равные промежутки времени в неоднородную электромагнитную волну при разных значениях времени моделирования: а).  $T = 1620dt$ . б)  $T = 1650dt$ . в).  $T = 1670dt$ . г).  $T = 1720dt$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС.  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Промежуток между инжектированием  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0} = 10^{-8}$  с.

Как можно видеть из рис. 3.18-3.22, траектория электрона будет различаться в зависимости от начальной фазы. Исследуем, как зависит ширина разброса электронов вдоль оси  $OX$  от таких характеристик, как амплитуда и частота поля волны, а также от начальной скорости электрона. В качестве критерия изменения распределения электронов будем использовать ширину распределения электронов вдоль оси  $OX$  в заданный момент времени в нижней части структуры инжектированных электронов.

Для исследование влияния амплитуды поля на ширину разброса электронов уменьшим амплитуду поля в 2 раза по сравнению с амплитудой поля на рис. 3.25(а). Результаты расчетов представлены на рис. 3.25(б). Ширина разброса электронов уменьшилась в 2 раза по сравнению с рис. 3.25(а).

Для исследование влияния частоты поля на ширину разброса электронов уменьшим частоту в 2 раза по сравнению с частотой на рис. 3.25(а). Полученный результат изображен на рис. 3.25(в). Ширина разброса электронов увеличилась в 2 раза по сравнению с рис. 3.25(а).

Для исследование влияния начальной скорости электрона на ширину разброса электронов уменьшим начальную скорость в 2 раза по сравнению со скоростью на рис. 3.25(а). Результаты расчетов представлены на рис. 3.25(г). Ширина разброса электронов уменьшилась в 2 раза по сравнению с рис. 3.25(а).

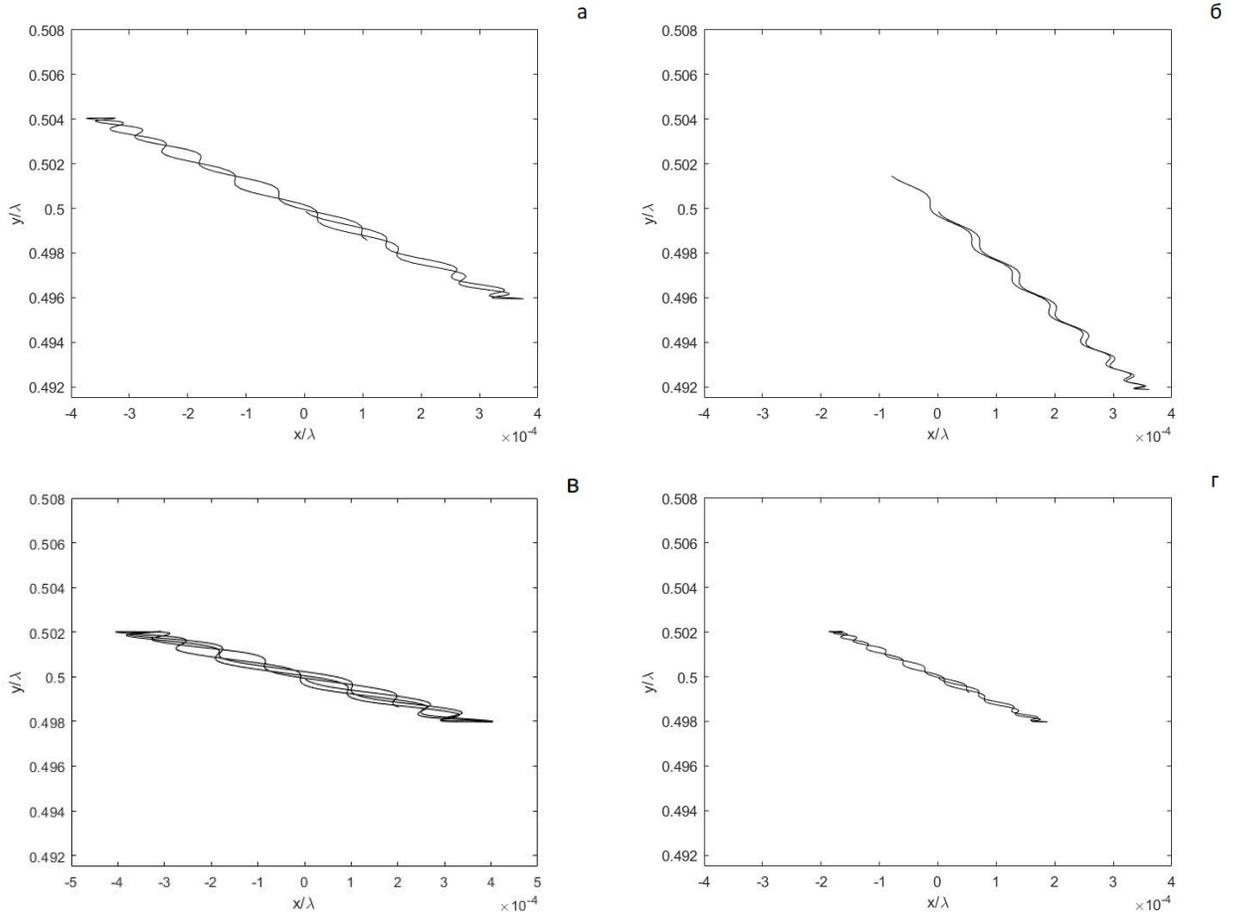


Рис. 3.25: Распределение электронов, инжектированных в неоднородную электромагнитную волну при разных значениях амплитуды электрического поля, несущей частоты волны и начальной скорости электрона, направленной по оси  $OY$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Промежуток между инжектированием  $dt = \frac{2\pi}{100\omega}$ . Координаты электронов фиксируются через время  $t = 1620dt$ . а).  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $v_{0y} = -5 \cdot 10^7$  см/с,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см; б).  $E_0 = 1.65 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $v_{0y} = -5 \cdot 10^7$  см/с,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см; в).  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 0.5 \cdot 10^6$  Гц,  $v_{0y} = -5 \cdot 10^7$  см/с,  $y_0 = 3.0 \cdot 10^4$  см; г).  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $v_{0y} = -2.5 \cdot 10^7$  см/с,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см.

Таким образом, ширина разброса электронов пропорциональна амплитуде поля и начальной скорости электрона и обратнопропорциональна частоте.

Если же инжектировать электроны в одной и той же фазе и фиксировать время расчета интервалом  $5dt$ , то электроны не будут концентрироваться в линейную структуру (рис. 3.26), а заполнят всю траекторию.

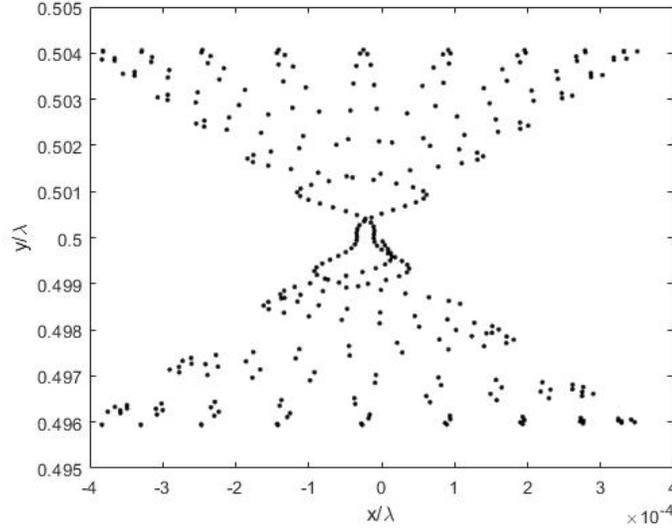


Рис. 3.26: Распределение электронов, инжектированных в неоднородную электромагнитную волну при одинаковой фазе.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Промежуток между инжектированием  $dt = \frac{2\pi}{100\omega}$ . Положение электронов замеряется через моменты времени, отличающиеся на  $5dt$ .  $E_0 = 3.3 \cdot 10^{-2}$  ед.СГС, частотой  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона:  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см. Начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.

### 3.3.4 Распределение электронов при инжектировании в обыкновенную и необыкновенную волны в ионосфере.

Рассмотрим инжекцию электронов в плоскую и неоднородную электромагнитную волну для случаев обыкновенной и необыкновенной волны.

На рис. 3.27(а) изображено распределение электронов при инжекции в плоскую обыкновенную волну. На рис. 3.27(б) приведена проекция данного распределения на плоскость  $XU$ . Электроны, как и следовало ожидать, расположены на образующей цилиндра, параллельной магнитному полю.

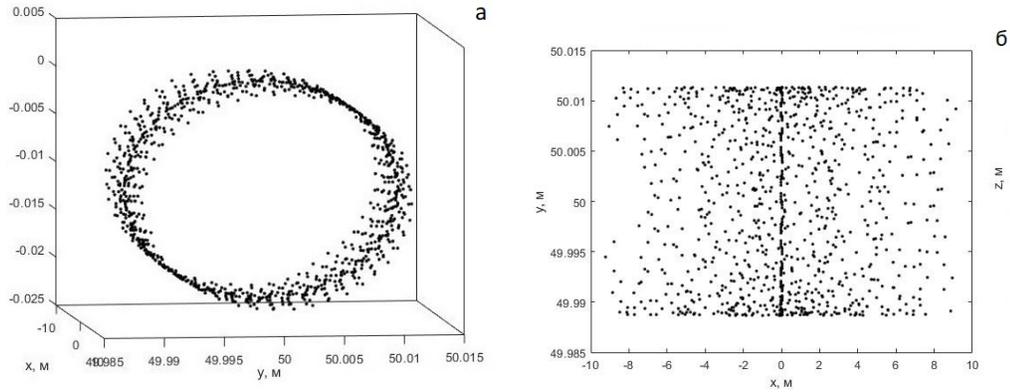


Рис. 3.27: Распределение электронов, инжектированных в поле плоской обыкновенной электромагнитной волны через равные промежутки времени  $d\tau = 1000dT$ , где  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0}$  при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл. Координаты электронов фиксируются через время  $t = 10^6 dT = 3.3 \cdot 10^{-4}$  с.  $(\varphi; \theta; \psi) = (\pi/2; 0; 0)$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

На рис. 3.28 изображено распределение электронов при инъекции в неоднородную обыкновенную волну. Как и в случае отсутствия постоянного магнитного поля, электроны концентрируются в квазистационарные линейные структуры, являющиеся образующими конуса второго порядка, ограниченными полосой на поверхности, огибающей траекторию, проходящей через нулевую точку. Однако данный эффект наблюдается лишь когда  $d\tau$  кратно  $100dT$ , т.е. периоду волны, в отличие от случая отсутствия магнитного поля.

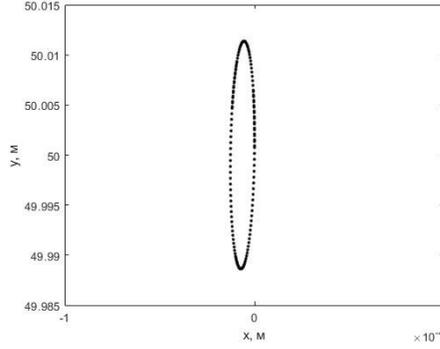


Рис. 3.28: Распределение электронов, инжектированных в поле неоднородной обыкновенной электромагнитной волны через равные промежутки времени  $d\tau = 1000dT$ , где  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0}$  при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл. Координаты электронов фиксируются через время  $t = 10^6 dT = 3.3 \cdot 10^{-4}$  с.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Рассмотрим инжекцию электронов в необыкновенную электромагнитную волну.

На рис. 3.29 изображено распределение электронов при инжекции в плоскую необыкновенную волну.

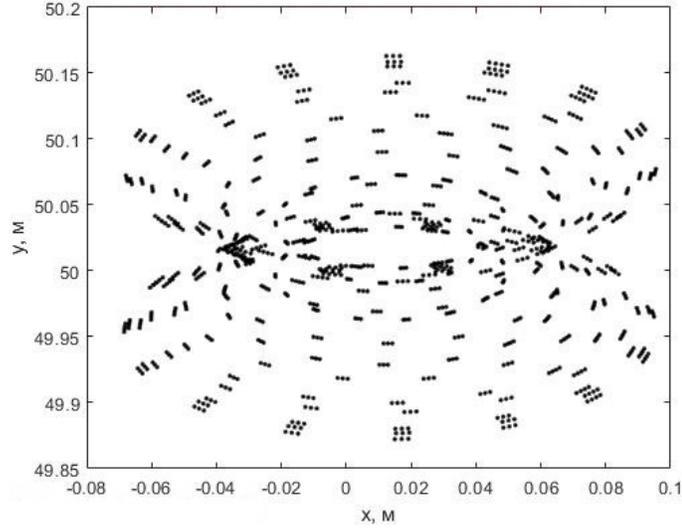


Рис. 3.29: Распределение электронов, инжектированных в поле плоской необыкновенной электромагнитной волны через равные промежутки времени  $d\tau = 1000dT$ , где  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0}$  при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

На рис. 3.30 изображено распределение электронов при инъекции в неоднородную необыкновенную волну. Угол поворота линии, вдоль которой концентрируются электроны, зависит от начальной фазы, а также от интервала между инъекцией частиц.

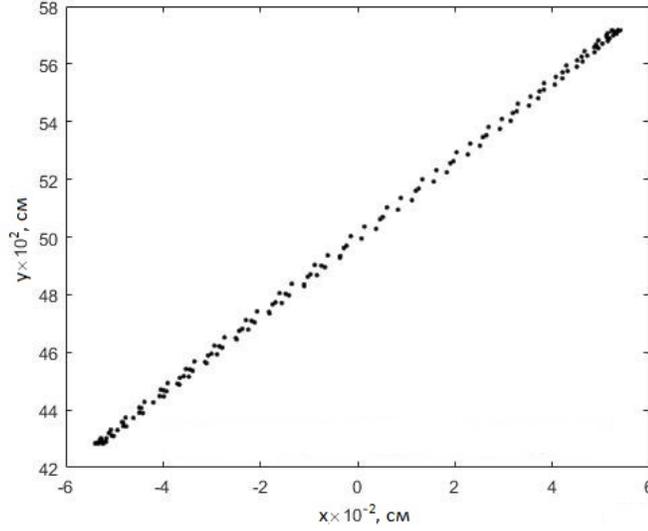


Рис. 3.30: Распределение электронов, инжектированных в поле неоднородной необыкновенной электромагнитной волны через равные промежутки времени  $d\tau = 1000dT$ , где  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0}$  при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

В случае эллиптической поляризации неоднородной необыкновенной электромагнитной волны траектория имеет вид, представленный на рис. 3.31.

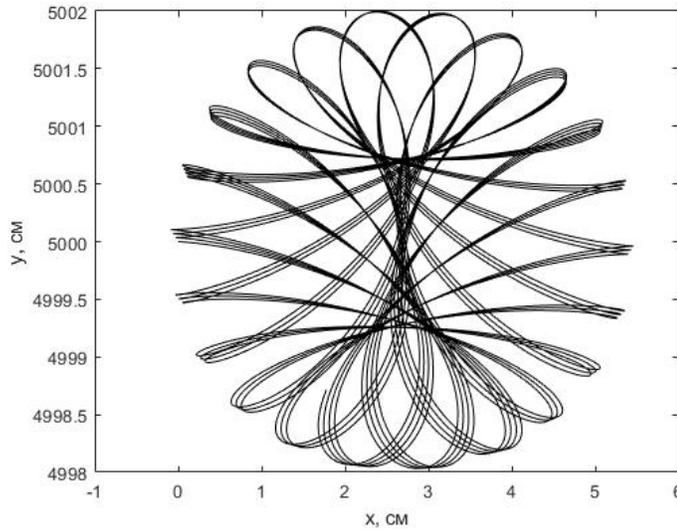


Рис. 3.31: Траектория электрона в поле неоднородной необыкновенной эллиптически поляризованной электромагнитной волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/4; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-\pi/4; 0; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . Время моделирования  $T = 5000dt$ .

Распределение электронов, инжектированных через равные промежутки времени в поле неоднородной, эллиптически поляризованной необыкновенной электромагнитной волны, изображено на рис. 3.32. Данное распределение уже не имеет форму линии на образующей конуса второго порядка, являющейся огибающей траектории, поскольку в данном случае отсутствует необходимая для этого пространственная структура неоднородной электромагнитной волны.

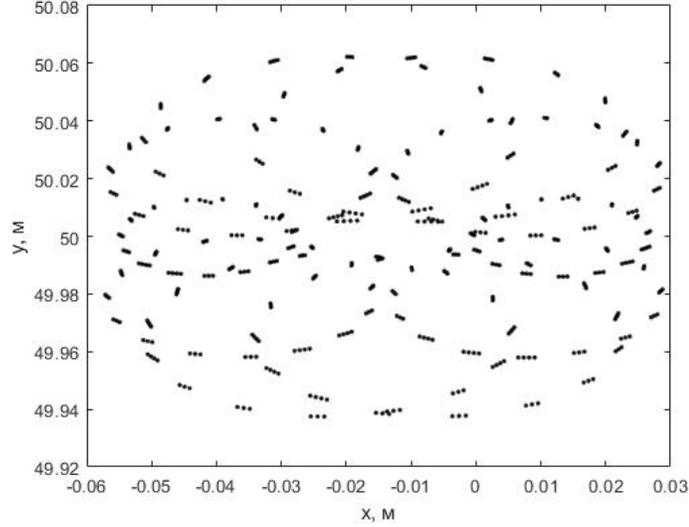


Рис. 3.32: Распределение электронов, инжектированных в поле неоднородной необыкновенной электромагнитной волны через равные промежутки времени  $d\tau = 10dT$ , где  $dT = \frac{2\pi}{100\omega_0}$  при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/4; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-\pi/4; 0; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с. Шаг по времени  $dt = \frac{2\pi}{100\omega_0}$ . Время моделирования  $T = 5000dt$ .

### 3.4 Спектр излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.

Исследуем спектр излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны. Выпишем выражение для мощности излучения, также называемое формулой Лармора:

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3}.$$

Для построения спектра мощности нам необходимо выражение  $P(\omega)$ . Используя равенство Парсеваля [136]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{v}(t)|^2 dt,$$

а также, т.к.  $|\dot{v}(\omega)| \in \mathbb{R}$  (т.е. мнимая часть = 0), учитывая

$$\int_{-\infty}^0 |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega,$$

имеем [2]:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2(t) dt = \frac{4q^2}{3c^3} \int_0^{+\infty} |\dot{v}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{dW}{d\omega} d\omega. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует выражение для нахождения энергетического спектра излучения заряженной частицы в поле электромагнитной волны [2]. Далее в работе исследуется нормированный спектр  $P(\omega) = \frac{dW}{d\omega}$ :

$$F_{a^2}(\omega) = \frac{3c^3}{4q^2} P(\omega) = \frac{3c^3}{4q^2} \frac{dW}{d\omega} = |\dot{v}(\omega)|^2, \quad (3.7)$$

где  $a^2 = |\dot{v}(\omega)|^2$  – квадрат ускорения частицы.

### 3.4.1 Зависимость спектра излучения электрона от направляющих углов неоднородной электромагнитной волны.

Рассмотрим неоднородную волну, сформированную двумя плоскими волнами с параллельными электрическими полями и углом  $\theta_2 - \theta_1$  между волновыми векторами. Как можно видеть на рис. 3.33 – 3.35, спектр зависит от угла  $\theta_2 - \theta_1$  между волновыми векторами. При уменьшении данного угла модулирующая частота  $\Omega$  уменьшается. На рис. 3.33 – 3.35 имеет место эффект подавления несущей. На рис. 3.42 дается пояснение о причинах подавления несущей частоты для данного сигнала по  $OX$  и  $OY$  и отсутствии такового для составляющей по оси  $OZ$ . Таким образом, возможно управлять боковыми частотами в спектре посредством изменения направляющих углов.

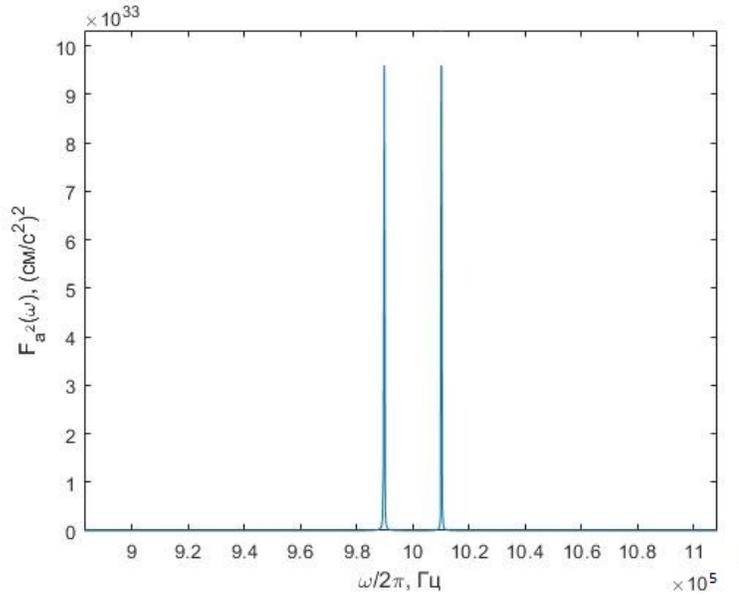


Рис. 3.33: Нормированный спектр излучения электрона поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; 5\pi/12; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 7\pi/12; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 5\sqrt{3} \cdot 10^3$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.  $\frac{\Omega}{2\pi} = 0.01 \cdot 10^6$  Гц.

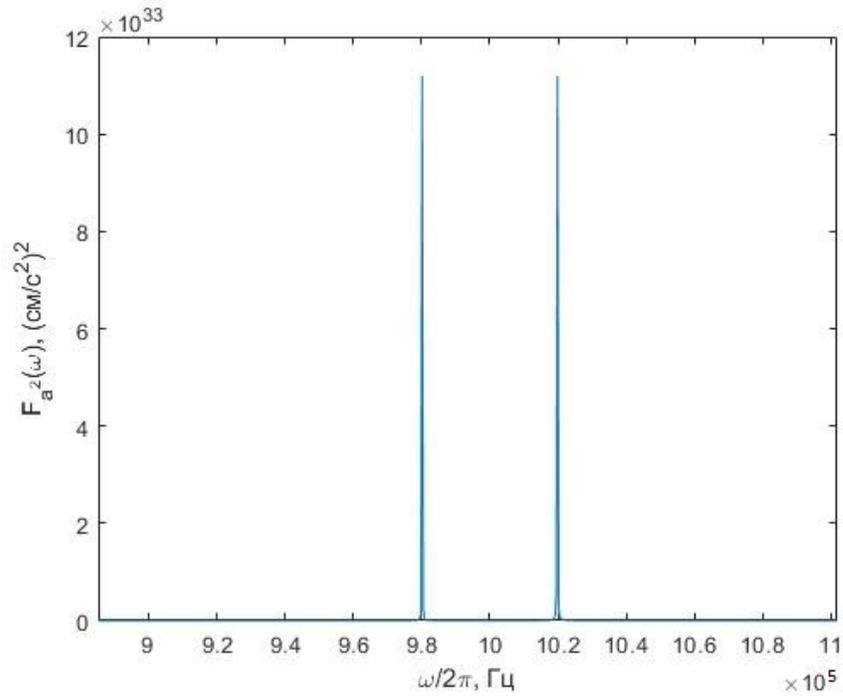


Рис. 3.34: Нормированный спектр излучения электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.  $\frac{\Omega}{2\pi} = 0.02 \cdot 10^6$  Гц.

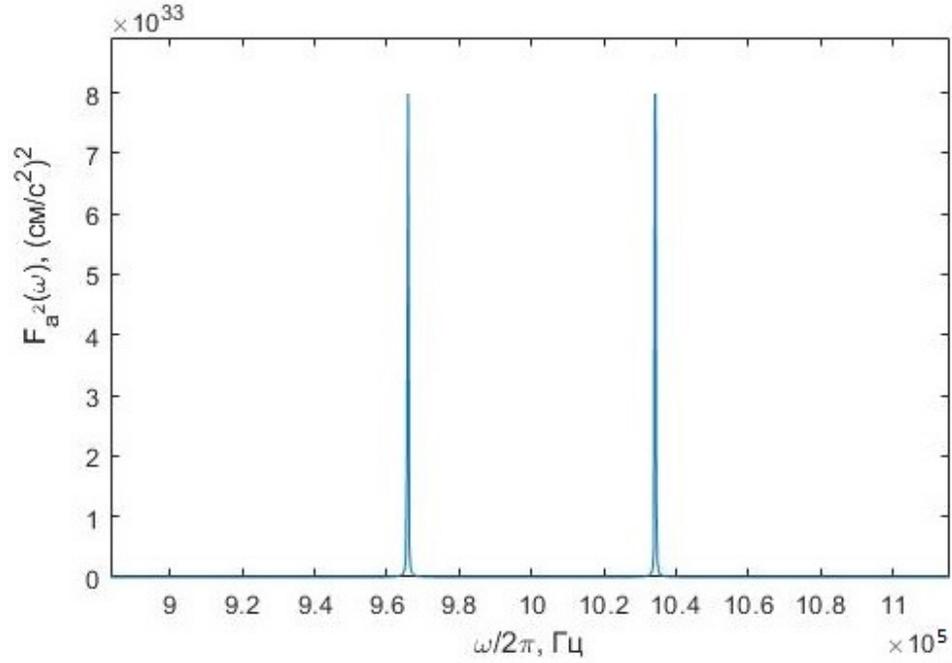


Рис. 3.35: Нормированный спектр излучения электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/6; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 5\pi/6; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = \frac{15}{2 \sin \pi/12} \cdot 10^3$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.  $\frac{\Omega}{2\pi} = 0.034 \cdot 10^6$  Гц.

На рис. 3.36 и 3.37 представлена зависимость частоты  $\Omega$  от углов  $\psi, \theta$ . Параметры: несущая частота  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц, амплитуда поля  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $\psi = \psi_1$  варьируем, как и  $\theta_1 = \pi - \theta_2$ . На графике  $\alpha = \pi/2 - \theta_1$ .

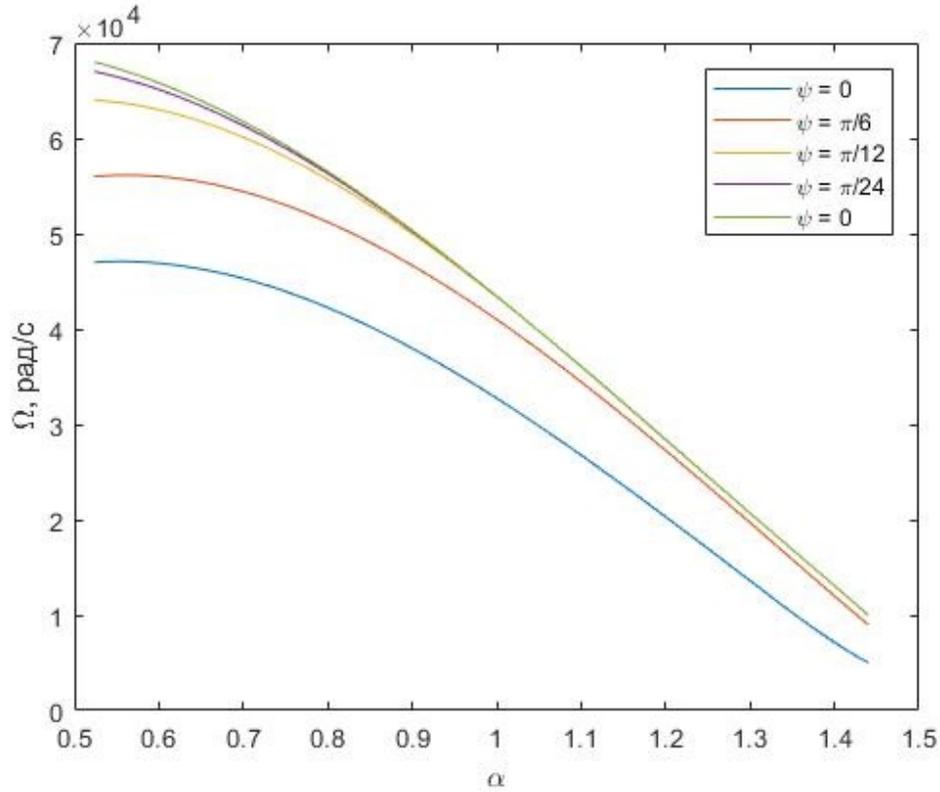


Рис. 3.36: Зависимость частоты  $\Omega$  от углов  $\theta_1$  и  $\psi_1$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ),  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 2.9 \cdot 10^4$  см, начальная скорость направлена по оси  $OY$ ,  $v_{0y} = 5 \cdot 10^7$  см/с.

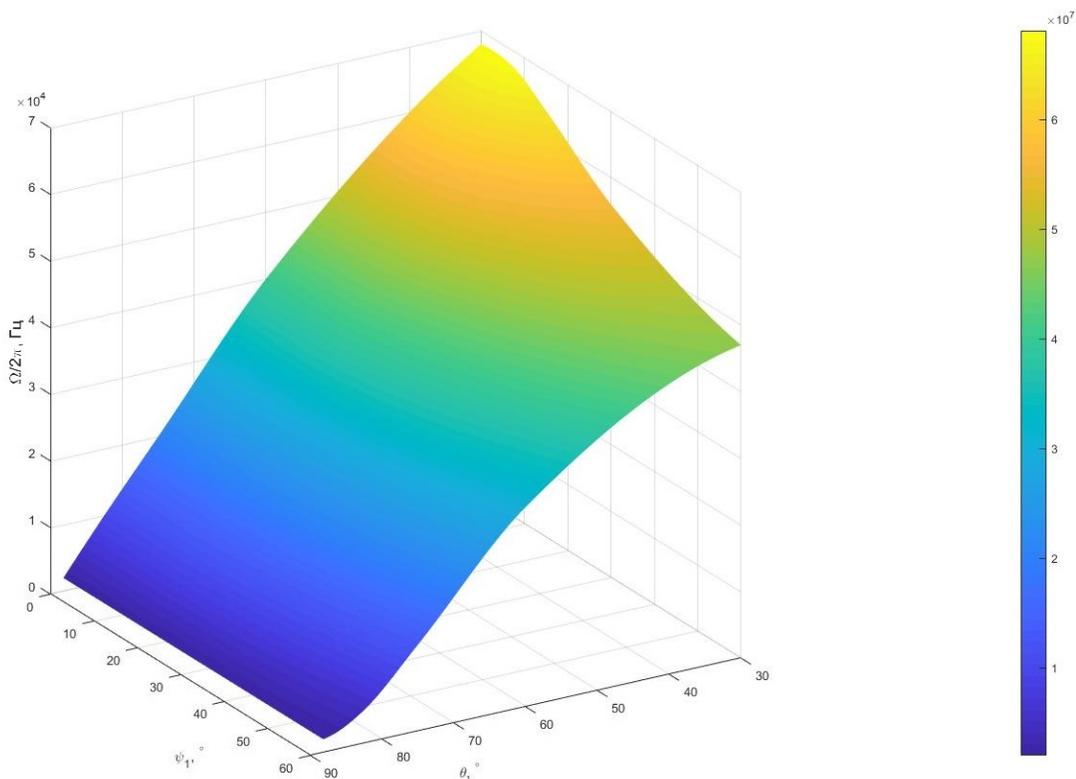


Рис. 3.37: Зависимость частоты  $\Omega$  от углов  $\theta_1$  и  $\psi_1$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ),  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 2.9 \cdot 10^4$  см, начальная скорость направлена по оси  $OY$ ,  $v_{0y} = 5 \cdot 10^7$  см/с.

Для объяснения спектра  $a^2(\omega)$  удобно рассмотреть спектры компонент ускорения  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ .

На рис. 3.38 показана траектория электрона в поле неоднородной волны, для которой построены спектры  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  составляющих ускорения.

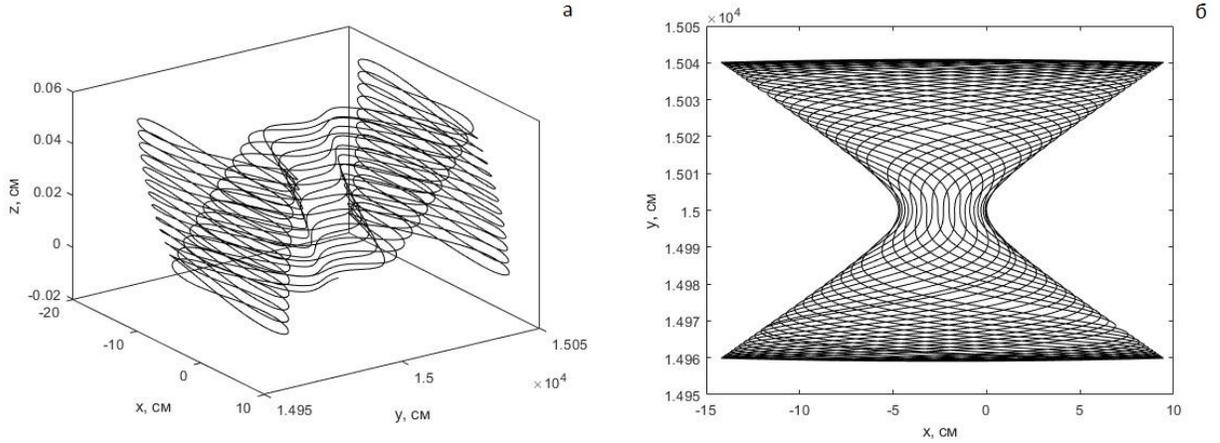


Рис. 3.38: Траектория электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 0.1$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$ . Время моделирования  $T = 6000dt$ . На рисунке изображено 12 периодов  $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

На рис. 3.39 – 3.41 показаны спектры составляющих ускорения  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  электрона в поле неоднородной волны.

Как можно видеть, у компоненты  $v_x$  спектр состоит из  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$  (рис. 3.39), где  $\omega_0$  – несущая частота, а  $\frac{\Omega}{2\pi} = 1.98 \cdot 10^5$  Гц – модулирующая частота. Здесь несущая частота подавляется за счет изменения на  $\pi$  фазы  $v_x$  в точке, выделенной красным кругом на рис. 3.42.

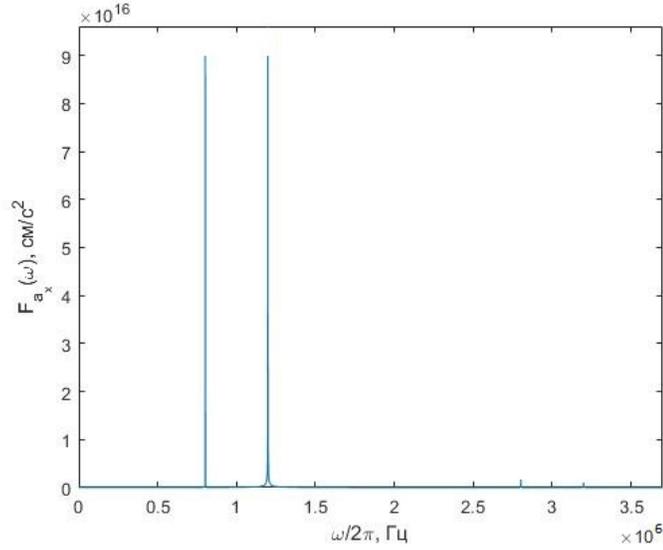


Рис. 3.39: Спектр компонента ускорения  $a_x$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $\frac{\Omega}{2\pi} = 1.98 \cdot 10^5$  Гц,  $E_0 = 0.1$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.

Спектр  $a_y$  состоит из гармоник  $\Omega$ , а также присутствуют небольшие гармоники на частотах  $2\omega_0 - \Omega$  и  $2\omega_0 + \Omega$  (рис. 3.40). Несущая частота  $2\omega_0$  подавлена по той же причине, как и у  $a_x$ .

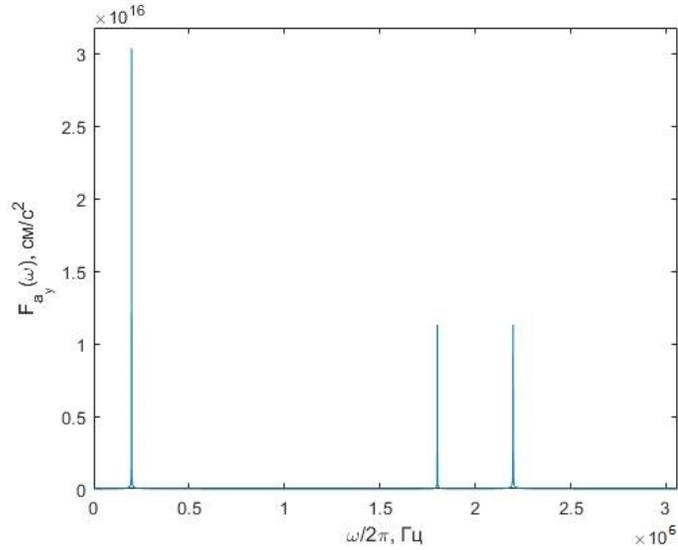


Рис. 3.40: Спектр компоненты ускорения  $a_y$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $\frac{\Omega}{2\pi} = 1.98 \cdot 10^5$  Гц,  $E_0 = 0.1$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.

На рис. 3.41 представлен спектр  $a_z$ , который состоит из частот  $2\omega_0$ ,  $2\omega_0 \pm 2\Omega$ .

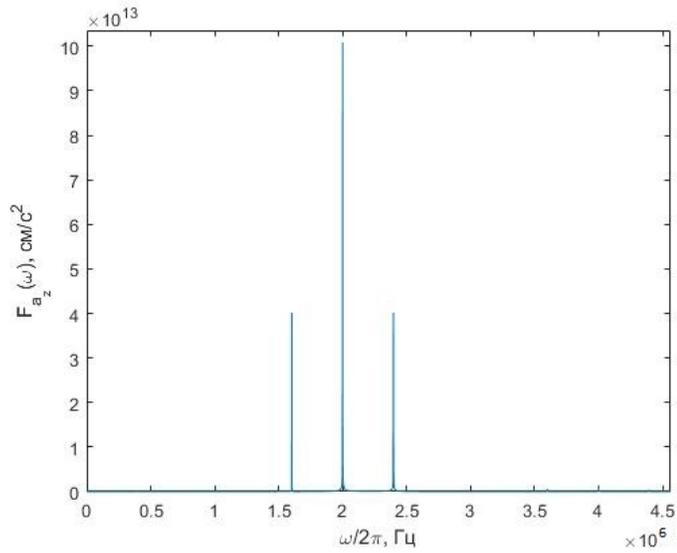


Рис. 3.41: Спектр компонента ускорения  $a_z$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $\frac{\Omega}{2\pi} = 1.98 \cdot 10^5$  Гц,  $E_0 = 0.1$  ед.СГС. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с.

На рис. 3.42 показаны зависимости компонент ускорения  $a_x$  и  $a_z$  от времени для демонстрации эффекта подавления несущей, возникающего из-за скачка фазы у  $a_x$  (рис. 3.42(а)). Для  $a_z$  скачок фазы отсутствует. Черным цветом показана огибающая. Красным кружком выделен момент смены фазы. На рис. 3.39 есть подавление несущей, а на 3.41 – нет.

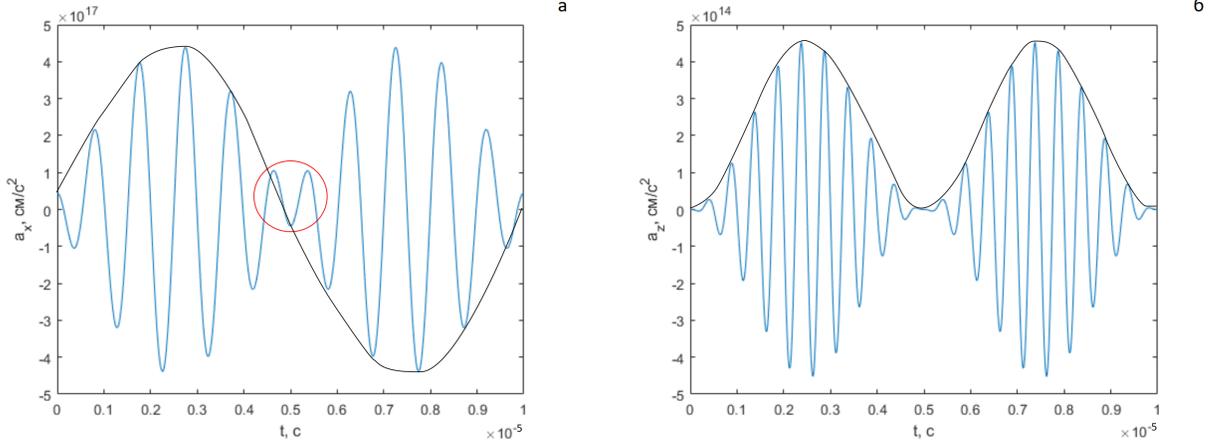


Рис. 3.42: а). Компонента ускорения  $a_x$  электрона в поле неоднородной волны.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 0.05$  ед.СГС. Шаг по времени  $dt = 2\pi/(100\omega_0)$  с, время моделирования  $T = (1000)dt$  с. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  см/с,  $v_{0y} = -5.0 \cdot 10^7$  см/с. б). Компонента ускорения  $a_z$  при указанных выше параметрах волны и частицы.

Таким образом, несущая частота подавлена у  $a_x$  и  $a_y$ , а у  $a_z$  – нет.

### 3.4.2 Зависимость спектра излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны от амплитуды электрического поля и начальной скорости электрона.

На рис. 3.43 представлена зависимость частоты  $\Omega$  от амплитуды электрического поля  $E_0$  для широкого диапазона значений электрического поля. При невысоких значениях полей зависимость линейна. На линейном участке  $\Omega = \kappa E_0$ , где  $\kappa = 2 \cdot 10^6 \left[ \frac{\Phi_{\text{р}} \cdot c}{\Gamma \cdot \text{см}} \right]$ . Здесь  $\Phi_{\text{р}}$  - единица заряда в СГС. При приближении  $\Omega$  к несущей частоте  $\omega_0$  зависимость становится нелинейной.

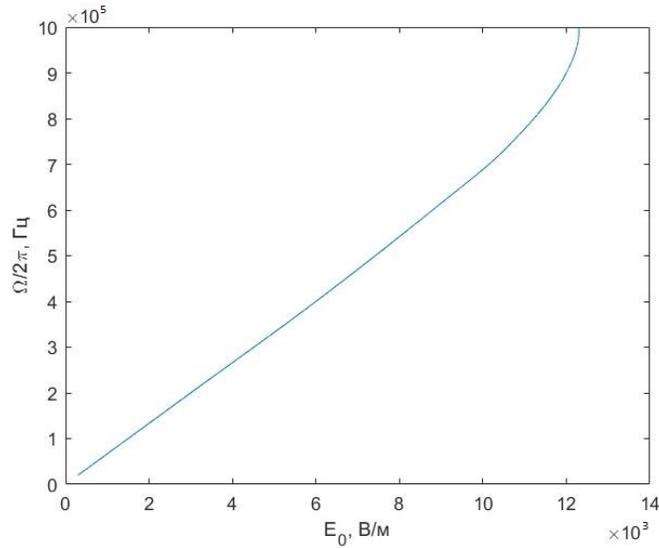


Рис. 3.43: Зависимость модулирующей частоты  $\Omega$  от амплитуды поля.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц. Начальные координаты  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость  $v_0 = 0$  см/с.

На рис. 3.44 приведена нелинейная зависимость частоты  $\Omega$  от начальной скорости  $v_{0y}$ . При увеличении начальной скорости до предельной (скорость, при превышении которой сила, пропорциональная  $v_x \times H_z$ , не способна затормозить электрон до пересечения максимума интерференционной структуры), частота  $\Omega$  уменьшается и становится равна нулю при значении предельной скорости. При скоростях выше предельной  $\Omega$  возрастает к асимптоте, полученной в работе [21] методом возмущений.

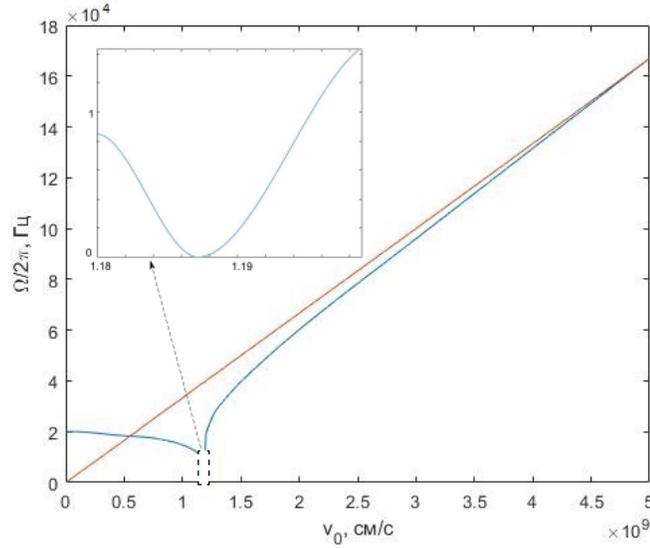


Рис. 3.44: Зависимость модулирующей частоты  $\Omega$  от начальной скорости электрона.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6$  Гц,  $E_0 = 10^{-2}$  ед.СГС. Начальные координаты  $x_0 = z_0 = 0$  см,  $y_0 = 1.5 \cdot 10^4$  см, начальная скорость направлена по оси  $OY$ .

### 3.4.3 Спектр излучения электрона в поле обыкновенной и необыкновенной волны в постоянном магнитном поле.

Рассмотрим спектры излучения электрона при движении в геомагнитном поле, в обыкновенной и необыкновенной волне.

Рассмотрим случай обыкновенной волны. На рис. 3.45 изображен спектр излучения электрона при наличии геомагнитного поля в обыкновенной неоднородной волне при старте из плоскости нулевого электрического поля (3.3). Основная мощность излучения приходится на циклотронную частоту. Поскольку геомагнитное поле направлено по оси ОХ, наибольший вклад в спектр имеют компоненты ускорения  $a_y$  и  $a_z$ . При старте электрона из окрестности максимума интерференционной структуры также в спектре появляется излучение на несущей частоте, что обусловлено бóльшим вкладом компоненты ускорения  $a_x$ .

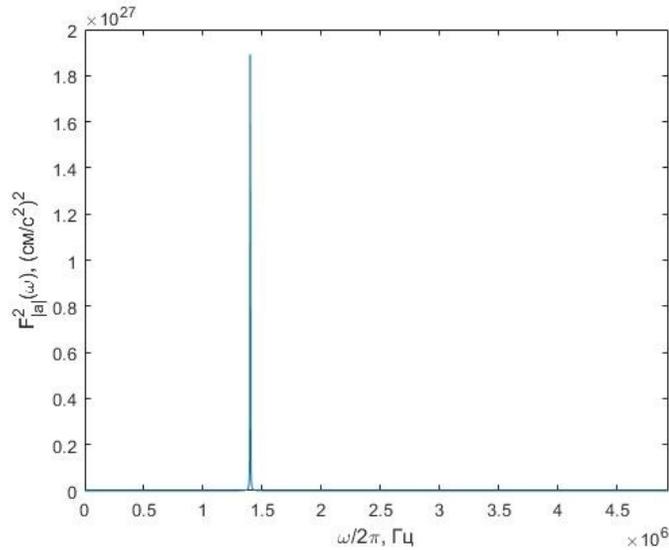


Рис. 3.45: Нормированный спектр излучения электрона в поле обыкновенной неоднородной волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Сравним спектр излучения электрона в обыкновенных плоской и неоднородной волнах. На рис. 3.46 изображен спектр излучения электрона при движении в геомагнитном поле в обыкновенной плоской волне. Как можно видеть, в случае плоской волны электрон излучает в основном на несущей частоте.

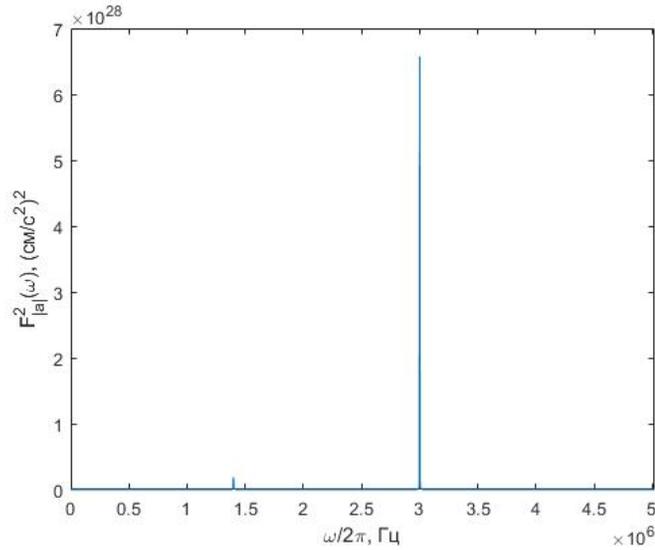


Рис. 3.46: Нормированный спектр излучения электрона в поле обыкновенной плоской волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi; \theta; \psi) = (\pi/2; 0; 0)$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Рассмотрим случай необыкновенной волны. На рис. 3.47 изображен спектр излучения электрона при движении в геомагнитном поле в необыкновенной неоднородной волне при старте из плоскости нулевого электрического поля. Как можно видеть на рис. 3.47, имеет место эффект подавления несущей, и основная мощность излучения приходится на боковые частоты. Наибольший вклад в излучение дает ускорение электрона в направлении  $OX$  ( $a_x$ ), наименьший –  $a_y$ . При старте электрона из окрестности максимума интерференционной структуры также в спектре появляется излучение на циклотронной частоте  $\frac{\omega_H}{2\pi} = 1.4 \cdot 10^6$  Гц. Составляющая  $a_y$  в этом случае большой вклад давать не будет.

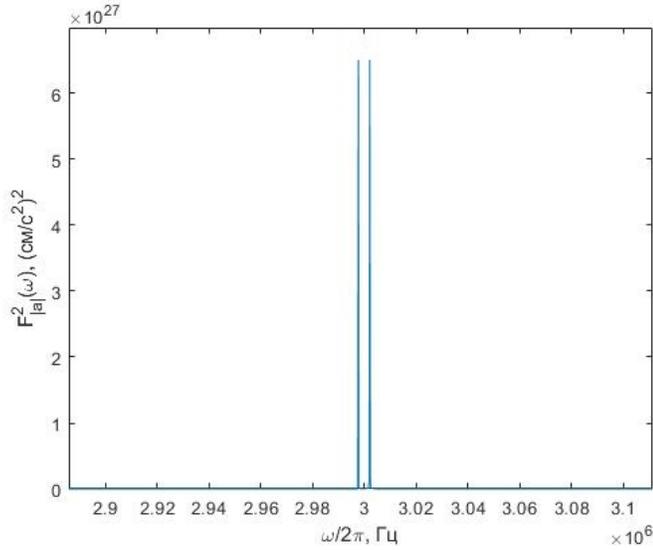


Рис. 3.47: Нормированный спектр излучения электрона в поле необыкновенной неоднородной волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

На рис. 3.48 изображен спектр излучения электрона при движении в геомагнитном поле в необыкновенной плоской волне. В спектре представлены составляющие как на циклотронной, так и на несущей частоте, в отличие от случая старта электрона из плоскости нулевого электрического поля в неоднородной волне, когда присутствует только составляющая на несущей частоте.

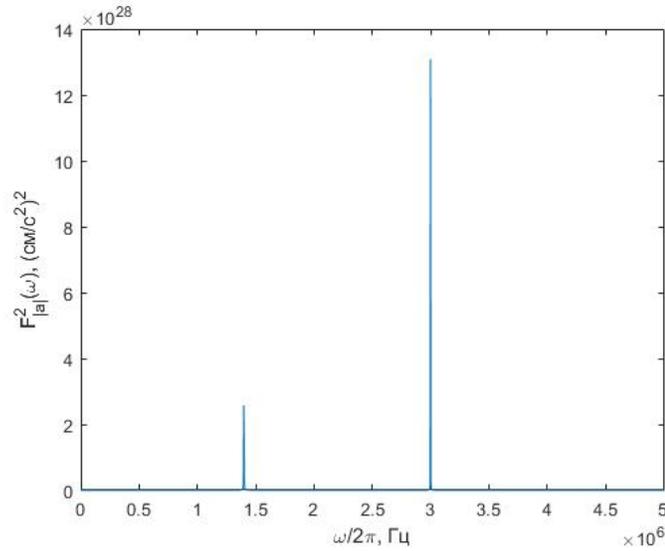


Рис. 3.48: Нормированный спектр излучения электрона в поле необыкновенной плоской волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi; \theta; \psi) = (\pi/2; 0; 0)$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

На рис. 3.49 изображен спектр излучения электрона при движении в необыкновенной неоднородной эллиптически поляризованной волне в присутствии геомагнитного поля. Мощность излучения на циклотронной и несущей частотах зависит от направляющих углов: с увеличением углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  увеличивается мощность излучения на циклотронной частоте и уменьшается на несущей. Мощность излучения на циклотронной частоте превышает мощность излучения на несущей частоте при  $\varphi_1 \lesssim \frac{5\pi}{12}$ .

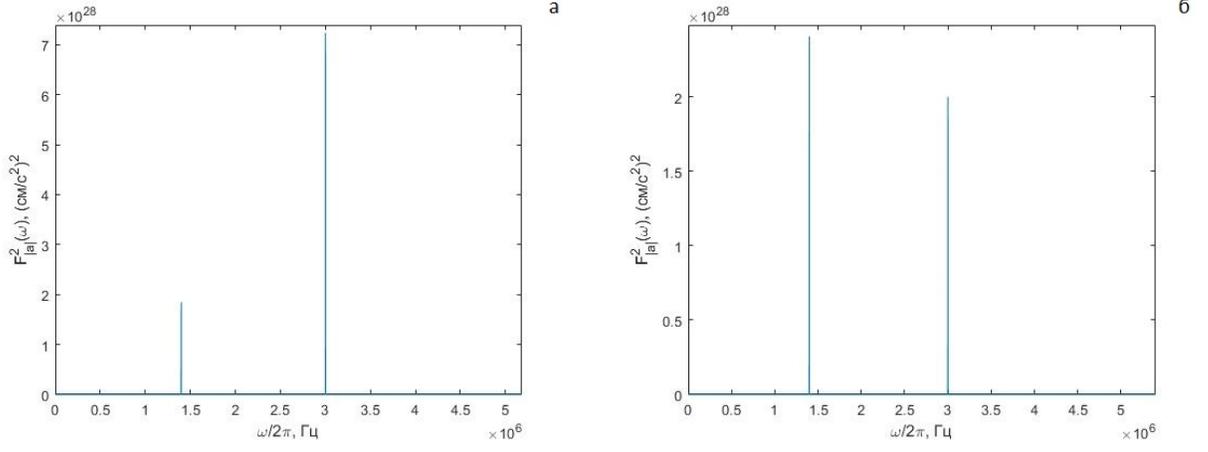


Рис. 3.49: Нормированный спектр излучения электрона в поле эллиптически поляризованной необыкновенной неоднородной волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл. а)  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/4; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-\pi/4; 0; 0)$ , б)  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (5\pi/12; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-5\pi/12; 0; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Соотношение мощности излучения электрона на несущей и циклотронной частотах также зависит от значения постоянного магнитного поля. На рис. 3.50 изображен спектр излучения электрона при движении в необыкновенной неоднородной эллиптически поляризованной волне в присутствии геомагнитного поля  $B_0 = 25$  мкТл и  $B_0 = 65$  мкТл.

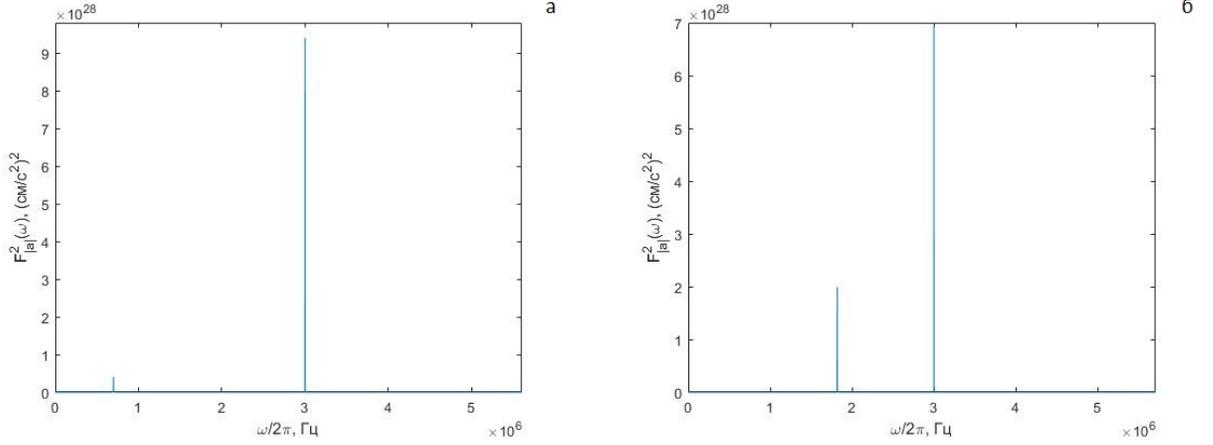


Рис. 3.50: Нормированный спектр излучения электрона в поле эллиптически поляризованной необыкновенной неоднородной волны при значении геомагнитного поля: а)  $B_0 = 25$  мкТл, б)  $B_0 = 65$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/4; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-\pi/4; 0; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30$  В/м. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 50$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

На рис. 3.51 изображен спектр излучения электрона при движении в необыкновенной неоднородной эллиптически поляризованной волне в присутствии геомагнитного поля  $B_0 = 50 \text{ мкТл}$ , при начальной фазе  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$  (а) и  $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2}$  (б). Как следует из рис. 3.51, при изменении начальной фазы волны происходит перераспределение энергии излучения на несущей и циклотронной частоте.

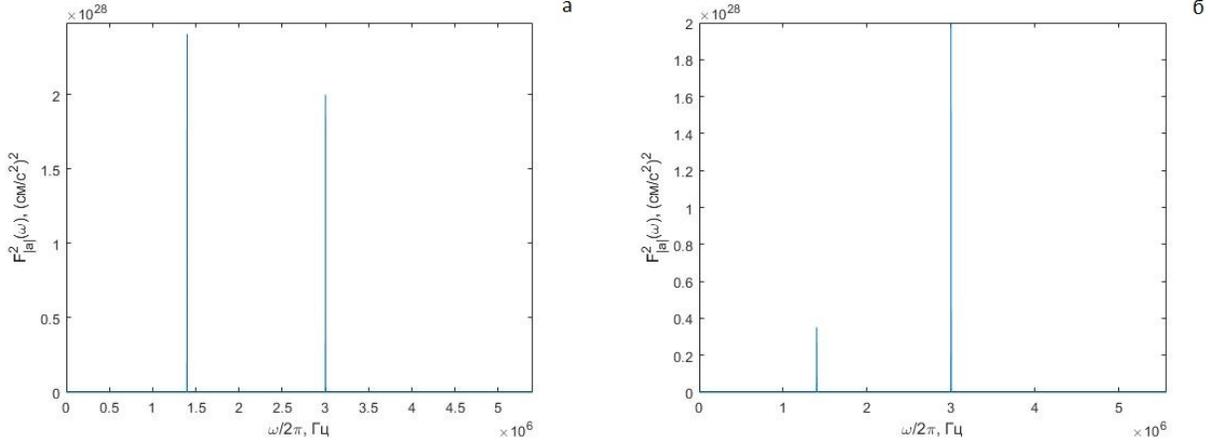


Рис. 3.51: Нормированный спектр излучения электрона в поле эллиптически поляризованной необыкновенной неоднородной волны при значении геомагнитного поля  $B_0 = 50 \text{ мкТл}$ .  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (5\pi/12; 0; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (-5\pi/12; 0; 0)$ .  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц,  $E_0 = 30 \text{ В/м}$ . Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0 \text{ м}$ ,  $y_0 = 50 \text{ м}$ , начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0 \text{ м/с}$ ,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ . а)  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ , б)  $\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

## Глава 4

# Сравнение тормозного и гироманнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.

Согласно [138], обыкновенная волна – волна, распространяющаяся перпендикулярно внешнему магнитному полю  $\vec{B}_0$ , электрическое поле которой параллельно  $\vec{B}_0$ . Дисперсионное соотношение для данной волны не зависит от  $\vec{B}_0$ . Необыкновенная волна – волна, распространяющаяся перпендикулярно внешнему магнитному полю  $\vec{B}_0$ , электрическое поле которой перпендикулярно  $\vec{B}_0$ . Дисперсионное соотношение для необыкновенной волны, в отличие от обыкновенной, зависит от  $\vec{B}_0$ . В результате взаимодействия с замагниченными электронами ионосферной плазмы данная волна становится эллиптически поляризованной: у поля волны появляется отличная от нуля проекция на направление волнового вектора.

В данном разделе проводится анализ численных расчетов тормозного и гироманнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны (обыкновенная и необыкновенная составляющие), с учетом геомагнитного поля и некоторых характеристик ионосферы.

Рассмотрим численные расчеты по разработанной модели излучения электрона сначала без учета геомагнитного поля Земли. В расчетах амплитуда электрического поля электромагнитной волны  $E_0$  изменяется от от 3 до 30 В/м, в зависимости от мощности нагревного стенда; несущая частота волны  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3$  МГц. В качестве начальной скорости электрона берется скорость теплового движения электронов

в ионосфере на высоте 100 км  $v_0 = 1.0 \cdot 10^5$  м/с. На рис. 4.1 приведена зависимость мощности тормозного излучения электрона в поле неоднородной и плоской электромагнитных волн от амплитуды волны. При значении поля  $E_0 = 30$  В/м (при максимальной мощности стенда HAARP, на высоте 100 км) мощность тормозного излучения электрона в поле неоднородной волны, согласно численным расчетам по разработанной в работе модели, достигает  $6.3 \cdot 10^{-28}$  Вт. Данная мощность превышает максимальную, приведенную в статье [65] для случая плоской волны, равную  $1.6 \cdot 10^{-28}$  Вт, полученную при тех же значениях поля.

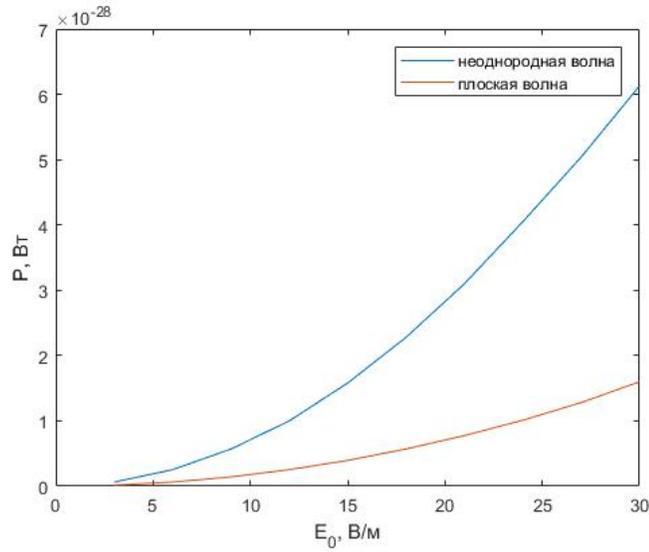


Рис. 4.1: Зависимость мощности тормозного излучения электрона в поле неоднородной и плоской электромагнитных волн от амплитуды электрического поля. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 90$  м. Несущая частота  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц. Параметры неоднородной волны:  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Начальная скорость электрона в поле неоднородной волны  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с. Параметры плоской волны:  $(\varphi; \theta; \psi) = (\pi/2; 0; 0)$ ,  $\Phi = 0$ . Начальная скорость электрона в поле плоской волны  $v_{0y} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0x} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Также на рис. 4.1 можно видеть, что в случае, если волна плоская, рассчитанная численно максимальная мощность тормозного излучения равна  $1.5 \cdot 10^{-28}$  Вт и достигается при значении амплитуды электрического поля  $E_0 = 30$  В/м (у стенда

НААРР на высоте 100 км), что совпадает с оценками в статье [65].

Таким образом, численные расчеты показали, что тормозное излучение электрона в поле неоднородной волны превышает тормозное излучение в поле плоской волны. Мощность тормозного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны зависит также от структуры волны.

Рис. 4.2 демонстрирует зависимость мощности тормозного излучения от одного из направляющих углов, определяющих структуру неоднородной волны.

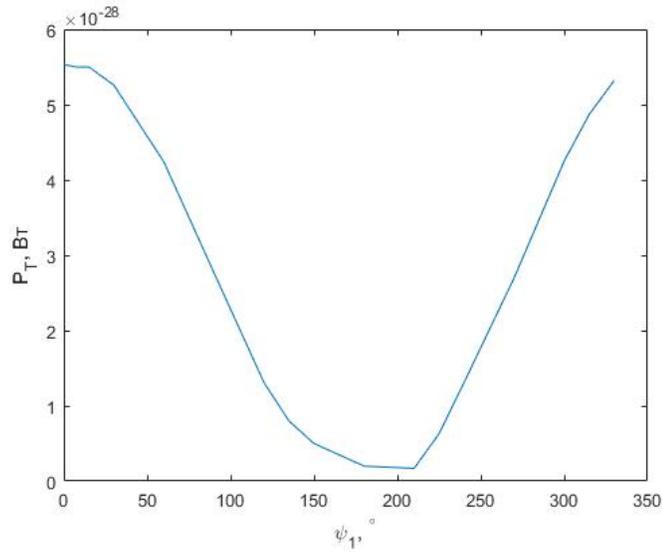


Рис. 4.2: Зависимость мощности тормозного излучения электрона в поле обыкновенной неоднородной электромагнитной волны от угла  $\psi_1$ .  $B_0 = 50$  мкТл. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 90$  м. Несущая частота  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц.  $(\varphi_1; \theta_1) = (\pi/2; \pi/3)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ .  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

Следует отметить, что при мощностях  $P \sim 10^{-28}$  Вт потери энергии электрона за секунду на много порядков меньше кинетической энергии частицы, то есть потерями за время моделирования ( $t_{\text{мод}} \leq t_1 = 1$  с) можно пренебречь, так как при скоростях электрона  $|v| \sim 10^5$  м/с: кинетическая энергия  $K \sim 10^{-20}$  Дж  $\gg 10^{-28} = P \cdot t_1$ . Таким образом, влиянием вторичного излучения электрона на траекторию частицы можно пренебречь.

Рассмотрим особенности движения электрона в неоднородной электромагнитной волне в присутствии геомагнитного поля. Мощность гиромагнитного излучения электрона в геомагнитном поле при воздействии нагревных стендов на ионосферу обычно превышает мощность тормозного излучения. Однако, согласно статье [65], при амплитуде электрического поля  $E_0 > 10$  В/м тормозное излучение превышает гиромагнитное. Проверим это утверждение для случая неоднородной волны. Выполним численное моделирование движения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны с учетом геомагнитного поля  $\vec{B}_0$ . Рассмотрим случай, когда волновой вектор неоднородной волны  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ , при этом для обыкновенной волны электрическое поле волны  $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ , а для необыкновенной –  $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ .

Оценим мощность излучения по формуле Лармора:  $P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{2q^2|\vec{a}|^2}{3c^3}$ , где  $\vec{a}$  – ускорение частицы. Мощность тормозного излучения найдем, подставив вместо  $|\vec{a}|^2$  квадрат тангенциального ускорения (характеризующего изменение скорости по величине):  $|a_T| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$  ( $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n$ , где  $\vec{a}_n$  – нормальное ускорение частицы).

Мощность гиромагнитного излучения найдем, подставив вместо  $|\vec{a}|^2$  квадрат нормального ускорения (характеризующего изменение скорости по направлению):  $|a_n| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$ , где  $R$  – радиус кривизны траектории в заданный момент времени.

На рис. 4.3 представлена зависимость мощности тормозного и гиромагнитного излучения электрона в поле обыкновенной неоднородной волны на высоте 100 км (постоянное магнитное поле направлено по оси ОХ) от амплитуды электрического поля данной волны. Как можно видеть, при параметрах волны и частицы, указанных в подписи к рис.4.3, мощность тормозного излучения выше при значениях амплитуды электрического поля  $E_0 > 15$  В/м (для плоской волны [65] тормозное излучение превышает гиромагнитное при  $E_0 > 10$  В/м).

На рис. 4.4 представлена зависимость мощности тормозного и гиромагнитного

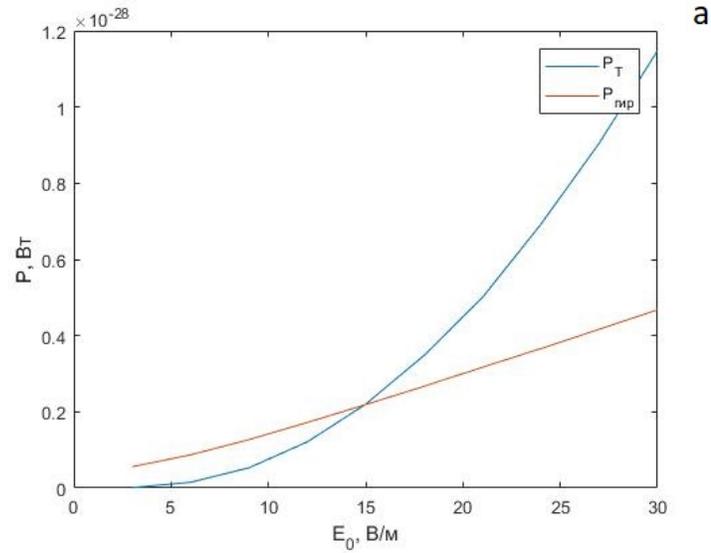


Рис. 4.3: Зависимость мощности тормозного ( $P_T$ ) и гироманнитного ( $P_{\text{гир}}$ ) излучения электрона в поле обыкновенной неоднородной электромагнитной волны от амплитуды электрического поля. Величина геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 65$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

излучения электрона в поле необыкновенной неоднородной волны на высоте 100 км.

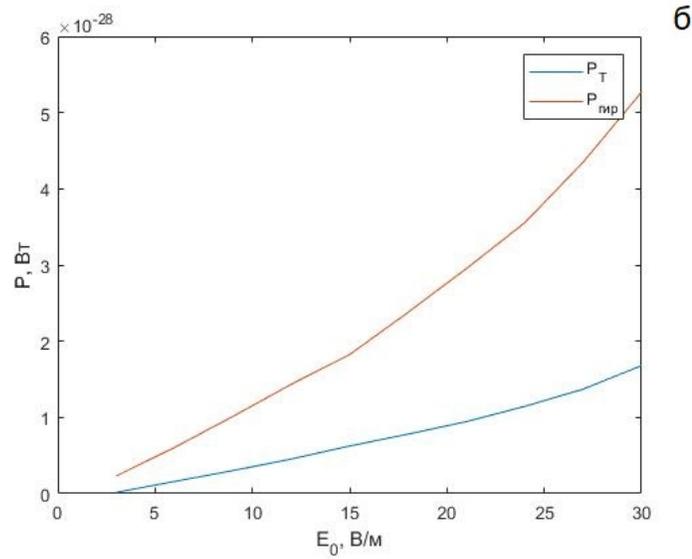


Рис. 4.4: Зависимость мощности тормозного ( $P_T$ ) и гироманнитного ( $P_{гир}$ ) излучения электрона в поле необыкновенной неоднородной электромагнитной волны от амплитуды электрического поля. Величина геомагнитного поля  $B_0 = 50$  мкТл.  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 3 \cdot 10^6$  Гц. Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 65$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с.

В таблице 4.1 приведены значения максимальной мощности тормозного излучения электрона в поле обыкновенной и необыкновенной плоской и неоднородной волн, при наличии и отсутствии геомагнитного поля, для различных нагревных стендов, на высоте 100 км. В качестве несущей частоты излучения взято значение  $\frac{\omega_0}{2\pi} = 5$  МГц. Направляющие углы неоднородной волны  $(\varphi_1; \theta_1; \psi_1) = (\pi/2; \pi/3; 0)$ ,  $(\varphi_2; \theta_2; \psi_2) = (\pi/2; 2\pi/3; 0)$ , фаза  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ . Начальные координаты электрона  $x_0 = z_0 = 0$  м,  $y_0 = 55$  м, начальная скорость  $v_{0x} = v_{0z} = 0$  м/с,  $v_{0y} = -1.0 \cdot 10^5$  м/с на высоте 100 км.

Таблица 4.1: Максимальная мощность тормозного излучения  $P_T$  электрона в поле обыкновенной и необыкновенной плоской и неоднородной волн, для различных нагревных стендов, на высоте ионосферы  $h = 100$  км.

	HAARP	Sura	EISCAT
Мощность излучения стендов, [МВт]	5100	280	1200
$E_0$ , [В/м]	30	7.5	14
<b>неоднородная волна (<math>P_T</math>, [Вт])</b>			
$B_0 = 0$	$6 \cdot 10^{-28}$	$1.93 \cdot 10^{-29}$	$1.04 \cdot 10^{-28}$
обыкновенная волна, $B_0 = 50$ мкТл	$5.43 \cdot 10^{-28}$	$1.77 \cdot 10^{-29}$	$9.48 \cdot 10^{-29}$
необыкновенная волна, $B_0 = 50$ мкТл	$6.03 \cdot 10^{-28}$	$2.04 \cdot 10^{-29}$	$1.06 \cdot 10^{-28}$
<b>плоская волна (<math>P_T</math>, [Вт])</b>			
$B_0 = 0$	$1.22 \cdot 10^{-28}$	$2.13 \cdot 10^{-30}$	$1.6 \cdot 10^{-29}$
обыкновенная волна, $B_0 = 50$ мкТл	$1.22 \cdot 10^{-28}$	$2.13 \cdot 10^{-30}$	$1.6 \cdot 10^{-29}$
необыкновенная волна, $B_0 = 50$ мкТл	$1.58 \cdot 10^{-28}$	$10^{-29}$	$3.42 \cdot 10^{-29}$

## Заключение.

Результаты исследования взаимодействия электронов бесстолкновительной плазмы с неоднородными электромагнитными волнами получены, используя численное решение нелинейной системы уравнений, описывающих движение электрона. Предложенный подход позволяет моделировать широкий спектр интерференционных структур, создаваемых суперпозицией произвольно направленных по отношению друг к другу плоских монохроматических электромагнитных волн. Определены параметры конфигурации траектории электрона в неоднородной волне. Изучены особенности траектории электрона в зависимости от начальных и граничных условий, амплитуды, частоты, фазы неоднородной волны, а также от углов, определяющих положение волновых векторов. Исследованы особенности эволюции траектории электрона. Выполнены численные эксперименты по инжекции, позволившие определить особенности поведения электронов ионосферной плазмы в неоднородной электромагнитной волне, в том числе, обыкновенной и необыкновенной. Проведено сравнение тормозного и гиромангнитного излучения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны.

В результате проделанной работы были получены следующие результаты и сделаны следующие выводы:

1. Построена и верифицирована численная модель движения электрона в поле неоднородной электромагнитной волны со сложной морфологией. Для проведения численных экспериментов подготовлен программный комплекс, состоящий из программ на языке Matlab, позволяющих с помощью метода Дормана-Принса находить траекторию, излучение и другие характеристики заряженной частицы в неоднородном электромагнитном поле, и программ на языке C++, позволяющих моделировать движение заряженных частиц с помощью метода PIC.
2. Построена трехмерная траектория заряженной частицы в поле неоднородной электромагнитной волны, в том числе, обыкновенной и необыкновенной, на основе численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений

с переменными коэффициентами, с учетом дрейфа параллельно электрическому полю и в направлении волнового вектора, а также характеристик волны и частицы, таких, как заряд частицы, масса частицы, фаза волны, амплитуда электрического и магнитного полей, частота волны, направляющих углов волновых векторов плоских волн, составляющих неоднородную волну.

3. Выполнены серии численных экспериментов по исследованию зависимости особенностей траектории электрона в интерференционной структуре от начальной фазы неоднородной электромагнитной волны  $\Phi_0$ , начальной скорости электрона  $v_0$  и начальных координат  $x_0, y_0, z_0$ . В случае, если начальная  $y_0$  координата не совпадает с плоскостями нулевого электрического поля, имеет место дрейфовое движение частицы по оси  $Ox$  а также дрейф по оси  $Oz$ . Выбор начальной координаты  $z_0$  влияет на значение начальной фазы, которая определяет дрейф электрона в направлении электрического поля. Этот дрейф отсутствует при значении фазы  $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi/2$ .
4. Исследована зависимость скорости электрона от амплитуды электрического поля, несущей частоты  $\omega_0$  и углов, определяющих параметры исходных электромагнитных волн, формирующих неоднородную волну. Установлена возможность достижения высоких значений скорости при старте из окрестности максимума интерференционной структуры.
5. Обнаружено и исследовано явление концентрирования инжектированных электронов в квазистационарные линейные структуры, являющиеся образующими конуса второго порядка, ограниченными полосой на поверхности конуса, в объеме которого расположена траектория. Это позволяет создавать в ограниченных объемах динамические образования, способные генерировать в бесстолкновительной плазме возмущения, размеры которых определяются параметрами неоднородных электромагнитных волн. Данная полоса вращается с несущей частотой вокруг точки инжекции электронов. Эксперименты по инжекции электронов выполнены также для обыкновенной и необыкновенной волн, с учетом постоянного магнитного поля.

6. Численные эксперименты по исследованию спектра излучения электрона в поле неоднородной волны показали возможность управления боковыми частотами несущей частоты ( $\omega_0 \pm \Omega$ ) с помощью амплитуды электрического и магнитного полей, несущей частоты  $\omega_0$  и углов, определяющих параметры исходных электромагнитных волн, формирующих неоднородную волну. Установлена зависимость мощности излучения на несущей и циклотронной частоте от начальной фазы, направляющих углов и величины магнитного поля. Численные эксперименты выполнены в присутствии внешнего магнитного поля для обыкновенной и необыкновенной составляющих волны.
7. В ходе численных экспериментов установлено, что мощность тормозного излучения электрона в поле неоднородной обыкновенной электромагнитной волны превосходит мощность гиромагнитного излучения при амплитуде электрического поля  $E_0 \gtrsim 15$  В/м. В случае неоднородной необыкновенной волны мощность гиромагнитного излучения превышает мощность тормозного. Расчеты выполнены в присутствии постоянного постоянного магнитного поля  $B_0 \sim 50$  мкТл.

## Литература

- [1] *Wolkov, D.M.* Electron in the field of a plane unpolarized electromagnetic wave from the point of view of the Dirac equations. *Z. Phys.* 1935. 94. P. 250–260.
- [2] *Bagrov V.G., Gitman D.M.* The Dirac equation and its solutions. Boston:Walter De Gruyter. 2014. 440 p.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука. 1973. 507 с.
- [4] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* О движении заряженной частицы в плоской монохроматической электромагнитной волне. *Квантовая электроника.* 2009. Т. 39. №1. С.68–72.
- [5] *Andreev S.N., Gabyshev D.N., Eremeicheva Yu.I, Makarov V.P., Rukhadze A.A., Tarakanov V.P.* Motion of a charged particle in a plane electromagnetic pulse. *Laser Physics.* Vol. 25. №6. 2015.
- [6] *Буц В.А., Буц А.В.* Динамика заряженных частиц в поле интенсивной поперечной электромагнитной волны. *ЖЭТФ.* М.: Издательство Наука РАН. 1996. Т. 110. Вып.3(9). С. 818–831.
- [7] *Popa A.* Periodicity property of relativistic Thomson scattering with application to exact calculations of angular and spectral distributions of the scattered field. *Phys. Rev. A.* U.S.: American Physical Society, 2011. Vol. 84(2). P. 023824.
- [8] *Копытов Г.Ф., Мартынов А.А., Акинцов Н.С.* Движение заряженной частицы в поле плоской эллиптически поляризованной электромагнитной волны. *Фундаментальные исследования.* М.: Издательство РАЕ, 2014. №9(5). С. 1013–1018.

- [9] *Wilks S. C., Kruer W. L., Tabak M., Langdon A. B.* Absorption of ultra-intense laser pulses. *Phys. Rev. Lett. U.S.: American Physical Society*, 1992. Vol. 69. P. 1383–1386.
- [10] *Sentoku Y., Cowan T. E., Kemp A., Ruhl H.* High energy proton acceleration in interaction of short pulse with dense plasma target. *Phys. Plasmas. U.S.: American Physical Society*, 2003. Vol. 10. P. 2009–2015.
- [11] *d’Humieres E., Lefebvre E., Gremillet L., Malka V.* Proton acceleration in high-intensity laser interaction with thin foils. *Phys. Plasmas. U.S.: American Physical Society*, 2005. Vol. 12. P. 9902.
- [12] *Mora P.* Thin-foil expansion into a vacuum. *Phys. Rev. E. U.S.: American Physical Society*, 2005. Vol. 72. P. 056401–056406.
- [13] *Oishi Y., Nayuki T., Fujii T.* Measurement of source profile of proton beams generated by ultraintense laser pulses using a Thomson mass spectrometer. *Phys. Plasmas. U.S.: American Physical Society*, 2005. Vol. 12. P. 073102–073107.
- [14] *Терновский В.В., Хапаев А.М.* Релятивистский заряд в плоской волне. *Фундамент. и прикл. матем.* 2002. Т. 8. Вып. 2. С. 547–557.
- [15] *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с.
- [16] *Bagrov V.G., Gitman D.M.* Exact solutions of relativistic wave equations. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1990. 366 p.
- [17] *Bagrov V.G., Gitman D.M.* The Dirac equation and its solutions. Boston:Walter De Gruyter, 2014. 440 p.
- [18] *Андреев С.Н., Еремеева Ю.И., Макаров В.П., Рухадзе А.А., Тараканов В.П.* О движении заряженной частицы в плоской квазимонохроматической электромагнитной волне. *Препринты ИОФ им. А.М. Прохорова*, 2013. №3. 31 с.

- [19] *Андреев С.Н.* Моделирование и оптимизация лазерно-плазменных источников корпускулярного и электромагнитного излучения: дис. д.ф.-м.н.: 01.04.21: защищена 20.02.2014. – М., 2013. – 248 с.
- [20] *Fedorov M.V., Goreslavsky S.P., Letokhov V.S.* Ponderomotive forces and stimulated Compton scattering of free electrons in a laser field. Phys. Rev. E. U.S.: American Physical Society, 1997. Vol. 55(1). P. 1015–1027.
- [21] *Болотовский Б.М., Серов А.В.* Особенности движения частиц в электромагнитной волне. УФН. 2003. Т. 173. №6. С. 667–678.
- [22] *Серов А.В.* Распределение заряженных частиц, инжектированных точечным источником, в плоскую электромагнитную волну. Краткие сообщения по физике. 2002. Т. 26. №8. С. 26–33.
- [23] *Серов А.В.* Пропорциональная  $\langle E^4 \rangle$  пондеромоторная сила, действующая на заряженную частицу, пересекающую неоднородную электромагнитную волну. Квантовая электроника. 1998. Т. 25. №3. С. 197–200.
- [24] *Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я., Скалли М.О.* Ускорение заряженных частиц лазерными пучками. ЖЭТФ. 1994. Т. 105 №3. С. 469.
- [25] *Garponov, A.V., Miller, M.A.* Potential wells for charged particles in a high-frequency electromagnetic field. JETP. 1958. 7(1). P. 168–169.
- [26] *Акинцев Н.С.* Влияние модулированной электромагнитной волны на траекторию движения релятивистской заряженной частицы. дис. к.ф.-м.н.: 01.04.03: Краснодар., 2017. 159 с.
- [27] *Четвериков Д.Л., Чижов Л.А.* Излучение заряда в поле плоской амплитудно-модулированной электромагнитной волны. Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика, астрономия. М.: Издательский дом МГУ, 1978. Т. 19. №2. С. 3–9.

- [28] *Давыдовский В.Я., Филлипов Ю.С.* Удержание заряженной частицы в амплитудно-модулированной электромагнитной волне, распространяющейся в слабо неоднородной среде. Журнал технической физики. М.: Наука, 1977. Т. 47. Вып. 5. С. 897–900.
- [29] *Копытов Г.Ф., Оксужян С.С., Тлячев В.Б.* К вопросу о характеристиках излучения электрона в модулированном электромагнитном поле. Известие высших учебных заведений. Физика. Томск: Издательство научно-технической литературы, 1986. Т. 29. №4. С. 125–138.
- [30] *Sheng Z.-M., Zhu L.-W., Yu M. Y., Zhang Z.-M.* Electron acceleration by an intense laser pulse with echelon phase modulation. New Journal of Physics. U.K.: IOP Publishing, 2010. Vol. 12. P. 013011.
- [31] *Фортков В.Е.* Физика высоких плотностей энергии. М.: Физматлит, 2013. 712 с.
- [32] *Scully M.O., Zubairy M.S.* Simple laser accelerator: Optics and particle dynamics. Phys. Rev. A. U.S.: American Physical Society, 1991. Vol. 44. P. 2656–2663.
- [33] *Huang S., Wu F.* Electron acceleration by a focused laser pulse in a static magnetic field. Phys. Plasmas. U.S.: American Physical Society, 2007. Vol. 14. P. 123107.
- [34] *Tajima T., Dawson J.M.* Laser electron accelerator. Phys. Rev. Lett. U.S.: American Physical Society, 1979. Vol. 43. P. 267–271.
- [35] *Holkundkar A., Brodin G., Marlund M.* Proton acceleration by circularly polarized traveling electromagnetic wave. Physical Review Accelerators and Beams. U.S.: American Physical Society, 2012. Vol. 15. P. 091301.
- [36] *Wang Y., Wang J., Jiang Y., Bao Y., Li X., Lin Z.* Laser pulse spectral shaping based on electro-optic modulation. Chinese Optics Letters. China: OSA Publishing, 2008. Vol. 6(11). P. 841–884.

- [37] *Прокопович И.П.* Высокоинтенсивные фемтосекундные и аттосекундные лазерные импульсы сверхширокого спектрального диапазона. Фундаментальные и прикладные физические исследования. Сборник трудов. Беларусь: Институт ядерных проблем, 2012. С. 146–156.
- [38] *Bulanov S.V., Kovrizhnykh L.M., Sakharov A.S.* Regular mechanisms of electron and ion acceleration in the interaction of strong electromagnetic waves with a plasma. *Physics Reports*. Netherlands: Elsevier BV, 1990. Vol. 186. P. 1–51.
- [39] *Pukhov A.* Strong field interaction of laser radiation. *Rep. Prog. Phys.* U.S.: IOP Publishing, 2003. Vol. 66. P. 47–101.
- [40] *Галкин А.Л., Коробкин В.В., Романовский М.Ю., Ширяев О.Б.* Релятивистское движение и излучение электрона в поле интенсивного лазерного импульса. *Квантовая электроника*. М.: Издательство Радио и связь, 2007. Т.37, №10. С.903–909.
- [41] *Scully M.O., Zubairy M.S.* Simple laser accelerator: Optics and particles dynamics. *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 2656–2663.
- [42] *Scully M.O., Zubairy M.S.* Acceleration of particles by an asymmetric hermitogaussian laser beam. *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46. 6640–6653.
- [43] *Salamin Y.I., Mocken G.R., Keitel C.H.* Relativistic electron dynamics in intense crossed laser beams: Acceleration and compton harmonics. *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67. P. 016501.
- [44] *Salamin Y.I., Mocken G.R., Keitel C.H.* Electron scattering and acceleration by a tightly focused laser beam. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. 2002. Vol. 5. P. 101301.
- [45] *Salamin Y.I., Keitel C.H.* Electron acceleration by a tightly focused laser beam. *Phys. Rev Lett*. 2002. Vol. 88. P. 095005.

- [46] *Kong Q., Ho Y.K., Wang J.X., Wang P.X., Feng L., Yuan Z.S.* Conditions for electron capture by an ultraintense stationary laser beam. *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 61. P. 1981–1984.
- [47] *Wang P.X., Ho Y.K., Yuan X.Q., Kong Q., Cao N., Sessler A.M., Esarey E., Nishida Y.* Vacuum electron acceleration by an intense laser. *Appl. Phys. Lett.* 2001. Vol. 78. P. 2253–2255.
- [48] *Wang J. X., Ho Y.K., Kong Q., Zhu L.J., Feng L., Scheid S., Hora H.* Electron capture and violent acceleration by an extra-intense laser beam. *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 6575–6577.
- [49] *Ho Y.K., Wang J.X., Feng L., Scheid W., Hora H.* Electron scattering by an intense continuous laser beam. *Physics Letter A.* 1996. Vol. 220. P. 189–193.
- [50] *Wang J.X., Ho Y.K., Scheid W., Hora H.* Nonlinear Compton effect and electron inelastic scattering by an intense stationary laser beam. *Physics Letter A.* 1997. Vol. 231. P. 139–143.
- [51] *Wang P.X., Hua J.F., Lin Y.Z., Ho Y.K.* Ponderomotive acceleration of electron by an ultrashort laser pulse. *Physics Letter A.* 2002. Vol. 300. P. 76–81.
- [52] *Еремеичева Ю.И.* Коллективное движение заряженных частиц в релятивистской лазерной плазме: дис. к.ф.ц.м.н.: 01.04.02: защищена 11.11.2013. М., 2013. 98 с.
- [53] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* Движение электрона в квазиплоской и квазимонохроматической электромагнитной волне. *Инженерная физика.* 2012. №4. С. 6–10.
- [54] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* Давление света и пондеромоторные силы в сверхсильных световых полях. *Фотоника.* 2010. №4. С. 18–25.
- [55] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* Сила, действующая на вещество в электромагнитном поле. *Физическая электроника: Материалы VI Всерос-*

- сийской конференции ФЭ-2010 (23–26 сентября 2010 г.). Махачкала: ИПЦ ДГУ, 2010. С. 8–19.
- [56] *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* Средние силы, действующие на вещество в сильных лазерных полях. Вопросы атомной науки и техники. 2010. №4. С. 240–244.
- [57] *Макаров В.П., Рухадзе А.А.* Основы современной электродинамики материальных сред. Часть IV. Электродинамика в отсутствие источников. Инженерная физика. 2013. №7. С. 38–48.
- [58] *Tarakanov V.P.* User's Manual for Code KARAT. VA, USA: Berkeley Research Associates, Inc. 1992.
- [59] *Гуревич А.В.* Нелинейные явления в ионосфере. УФН. 2007. Т. 177. №11. С. 1145Ц1177.
- [60] *Bailey V.A.* Nature. 1937. №139. 68, 838.
- [61] *Благовещенская Н.Ф., Борисова Т.Д., Йоман Т.К. и др.* Эффекты модификации высокоширотной ионосферы мощным коротковолновым радиоизлучением. Известия ВУЗов. Сер. Радиофизика. 2010. Т.LIII. №9–10. С. 571–593.
- [62] *Благовещенская Н.Ф., Борисова Т.Д., Калмыкин А.С. и др.* Эффекты модификации высокоширотной ионосферы мощным коротковолновым радиоизлучением. Известия ВУЗов. Сер. Радиофизика. 2012. Т.LV. №1–2. С. 141–157.
- [63] *Грач С.М.* Взаимодействие мощных радиоволн с ионосферой. Ч.1. Возбуждение плазменной турбулентности в верхней ионосфере: Учеб. пособие. Н.Н.:Нижегородский Госуниверситет. 2012. 58 с.
- [64] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир. 1962. 702 с.
- [65] *Лапшин В.Б., Котонаева Н.Г., Перминова Е.С.* Сопоставление мощностей тормозного и циклотронного излучений в ионосферной плазме при ее на-

греве мощными КВ-радиоволнами. Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. Т. 21. №9. С. 43.

- [66] *Dormand J.R., Prince P.J.* A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. 6(1). P. 19–26.
- [67] *Yee K.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1966. 14(3). P. 302–307.
- [68] *Taflove A., Hagness S.* *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. 3d edition. Artech House. London. 2005. P. 51–80.
- [69] *Shlager K.L., Schneider J.B.* A Survey of the Finite-Difference Time-Domain Literature. Chap. 1 in *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. A. Taflove, ed., Norwood, MA: Artech House. 1998.
- [70] *Taflove A., Brodwin M.E.* Numerical solution of steady-state electromagnetic Scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1975. Vol. 23. P. 623–630.
- [71] *Holland R.* Threde: a free-field EMP coupling and Scattering code. *IEEE Trans. Nuclear Sci.* 1971. Vol. 24. P. 2416–2421.
- [72] *Taflove A.* Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic penetration problems. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* 1980. Vol. 22. P. 191–202.
- [73] *Mur G.* Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* 1981. Vol. 23. P. 317–382.
- [74] *Kricgsmann G.A., Taflove A., Umashankar K.R.* A new formulation of electromagnetic wave scattering, using an on-surface radiation boundary condition approach. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1987. Vol. 35. P. 153–161.

- [75] *Moore T.G., Blaschak J.G., Taftlove A., Kriegsmann G.A.* Theory and application of radiation boundary operators. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1988. Vol. 36. P. 1797–1812.
- [76] *Berenger J-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Computational Physics.* 1994. 114(2). P. 185–200.
- [77] *Katz D.S., Thiele E.T., and Taftlove A.* Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FDTD meshes. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 1994. Vol. 4. P. 268–270.
- [78] *Reuter C.E., Joseph R.M., Thiele E.T., Katz D.S., Taftlove A.* Ultrawideband absorbing boundary condition for termination of waveguiding structures in FDTD simulations. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.* 1994. Vol. 4. P. 344–346.
- [79] *Sacks Z.S., Kingsland D.M., Lee R., Lee J.F.* A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1995. Vol. 43. P. 1460–1463.
- [80] *Gedney S.D.* An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD lattices. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 1996. Vol. 44. P. 1630–1639.
- [81] *Umashankar K.R., Taftlove A.* A novel method to analyze electromagnetic Scattering of complex objects. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* 1982. Vol. 24. P. 397–405.
- [82] *Taftlove A., Umashankar K.R.* Radar cross section of general three-dimensional scatterers. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* 1983. Vol. 25. P. 433–440.
- [83] *Holland R., Williams J.* Total-field versus scattered-field finite-difference Codes: A Comparative Assessment. *IEEE Trans. Nuclear Science.* 1983. 30(6). P. 4583–4588.

- [84] *De Raedt, Michiels H.K., Kole J.S., Figge M.T.* Solving the Maxwell equations by the Chebyshev method: A one-step finite-difference time-domain algorithm. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* 2003. Vol. 51. P. 3155–3160.
- [85] *Huang Y.* Simulation of Semiconductor Materials Using FDTD Method, M.S. thesis, Northwestern Univ. Evanston, IL, 2002.
- [86] *Chang S.-H., Taflove A.* Finite-difference time-domain model of lasing action in a four-level two-electron atomic system. *Optics Express.* 2004. Vol. 12. P. 3827–3833.
- [87] *Soriano A., Navarro E.A.* Analysis of the finite difference time domain technique to solve the Schrodinger equation for quantum devices. *Journal of applied physics.* 2004. Vol. 95. №12. P. 8011–8018.
- [88] *Moxley F.I., Byrnes T., Fujiwara F., Dai W.* A generalized finite-difference time-domain quantum method for the N-body interacting Hamiltonian. *Computer Physics Communications.* 2012. Vol. 183. №11. P. 2434–2440.
- [89] *Moxley F.I., Chuss D.T., Dai W.* A generalized finite-difference time-domain scheme for solving nonlinear Schrodinger equations. *Computer Physics Communications.* 2013. Vol. 184. №8. P. 1834–1841.
- [90] *Moxley F.I., et al.* Contemporary Mathematics: Mathematics of Continuous and Discrete Dynamical Systems. American Mathematical Society. 2014.
- [91] *Benouatas A.* Alternative Approach for the Time Domain Solution of the Schrodinger Equation. *Quant. Phys. Lett.* 2017. Vol. 6. №1. P. 53–64.
- [92] *Ahmed I., Chua E.K., Li E.P., Chen Z.* (2008). Development of the three-dimensional unconditionally stable LOD-FDTD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* 2008. Vol. 56. №11. P. 3596–3600.
- [93] *Chaudhury B., Boeuf J.P.* Computational Studies of Filamentary Pattern Formation in a High Power Microwave Breakdown Generated Air Plasma. *IEEE Transactions on Plasma Science.* 2010. Vol. 38. №9. P. 2281–2288.

- [94] <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [95] <https://www.ansys.com/>
- [96] <https://www.comsol.ru/>
- [97] <http://fdtd.kintechlab.com/ru/start>
- [98] <https://www.remcom.com/xfdtd-3d-em-simulation-software>
- [99] *Колмычков В.В., Мажорова О.С., Федосеев Е.Э.* Численный метод решения уравнений МГД. Препринт ИПМ №30. Москва, 2009.
- [100] *Козлов А. Н.* МГД-модели физических процессов в плазменных ускорителях диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва, 2013.
- [101] *Круковский А.Ю., Гасилов В.А., Повещенко Ю.А., Шарова Ю.С., Клочкова Л.В.* Реализация полностью консервативной лагранжево-эйлеровой схемы для двумерных задач магнитной газодинамики. Матем. моделирование. 2020. Т. 32. №1. С. 50–70.
- [102] *Ольховская О.Г., Гасилов В.А., Марков М.Б., Валько В.В.* Моделирование течения излучающего газа около возвращаемого космического аппарата. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. №166. С. 1–26.
- [103] *Rumpf R.C., Garcia C.R., Berry E.A., Barton J.H.* Finite-Difference Frequency-Domain Algorithm for Modeling Electromagnetic Scattering from General Anisotropic Objects. PIERs B. 2014. 61. P. 55–67.
- [104] *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma Physics via Computer Simulation. IOP Publishing Ltd 1991.
- [105] *Hockney, Roger W.; James W. Eastwood.* Computer Simulation Using Particles. Adam Hilger, IOP Publishing Ltd, 1989. 523 p.

- [106] *Григорьев Ю.Н., Вшивников В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами Частиц-В-Ячейках. Новосибирск, издательство сибирского отделения РАН, 2004.
- [107] *Harlow F.H., Dickman D.O., Harris D.E., Martin R.E.* Two-dimensional hydrodynamic calculations. Los Alamos Scientific Lab. Rep. NLA-2301, 1959.
- [108] *Харлоу Ф.Х.* Численный метод частиц-в-ячейках для задач гидродинамики. Вычислительные методы в гидродинамике, Под ред. С.С. Григоряна и Ю.Д. Шмыглевского. М.: Мир, 1967. 383 с.
- [109] Вычислительные методы в физике плазмы. Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха и М. Ротенберга. М.: Мир, 1974. 242 с.
- [110] *Buneman O.* Dissipation of currents in ionized media. Phys. Rev. 1959. V. 115. №. 3. P. 503–519.
- [111] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. Под ред. К.И. Барабенко. М.: Наука, 1979. 295 с.
- [112] *Яненко Н.Н., Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шокин Ю.И.* О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями. Числ. мет. мех. спл. среды. 1970. Т. 1. С. 40–62.
- [113] *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982, 392 с.
- [114] *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц-в-ячейках для решения задач динамики разреженного газа. 1. Основы построения методы. Журн. выч. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. №5. С. 1195–1208.
- [115] *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 518 с.
- [116] *Кертис Д.* Методы Монте-Карло для итерации линейных операторов. Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. №5(77). С. 149–174.

- [117] *Haviland J.K.* The solution of two molecular flow problems by the Monte-Karlo method. *Methods in Comput.Phys. Adv. in Research and Appl. in Hydrodynamics.* N-Y, 1965. V. 4. P. 109–209.
- [118] *Григорьев Ю.Н., Иванов М.С., Харитонова Н.И.* К вопросу о решении нелинейных кинетических уравнений динамики разреженного газа методом Монте-Карло. *Числен. методы мех. спл. среды.* Новосибирск. 1971. Т.2. №4. С. 101–107.
- [119] *Grigoryev Yu.N., Yanenko N.N., Ivanov M.S.* Numerical simulation of the rarefied gas dynamics. *Lect.Notes Phys.* 1981. V. 141. P. 454–460.
- [120] *Yanenko N.N., Grigoryev Yu.N. et al.* Methods of statistical modeling and direct numerical integration of kinetic equations of gas theory. Development and application to problems of rarefied gas dynamics. *Proc. 13th Int. Symp. on RGD.* V. 1.N-Y., London: Plenum Press, 1985. P. 371–382.
- [121] *Bird G.A.* *Molecular Gas Dynamics.* Oxford: Clarendon Press, 1976.
- [122] *Boris J.P.* Relativistic plasma simulation - optimization of a hybrid code coordinates. *Proceedings 4th International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas.* Washington. 1970.
- [123] *Березин Ю.А., Вшивков В.А.* Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск.: Наука, 1980. 94 с.
- [124] *Hockney R. W.* A computer experiment of anomalous diffusion. *Phys. Fluids.* 1966. V. 9. №9. P. 1826–1835.
- [125] *Burger P., Dunn D.A., Halstead A.S.* Computer experiments on the randomization of electrons in a collisionless plasma. *Phys. Fluids.* 1965. V. 8. №12. P. 2263–2272.
- [126] *Birdsall C.K., Fluss D.* Clouds-in-clouds, clouds-in-cells physics for many-body plasma simulation. *J.Comp. Phys.* 1969. Vol. 3. №4. P. 494–511.

- [127] *Villasenor J., Buneman O.* Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solver. *Computer Phys. Comm.* 1992. V. 69. P. 306–316.
- [128] *Esirkepov T. Zh.* Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form factor. *Computer Physics Communications.* 2001. 135. P. 144–153.
- [129] *Werner G.R., Jenkins T.G., Chap A.M., Cary J.R.* Speeding Up Simulations By Slowing Down Particles: Speed-Limited Particle-In-Cell Simulation. *Physics of Plasmas.* 2018. Vol. 25. P. 123512.
- [130] *Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А., Сак Х.* Генерация мощных когерентных аттосекундных рентгеновских импульсов с помощью релятивистских электронных зеркал. *Квантовая электроника.* 2013. Т. 43. №5. С. 443–448.
- [131] *Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А.* Нелинейное отражение лазерных импульсов большой амплитуды от релятивистских электронных зеркал. *Квантовая электроника.* 2016. Т. 46. №4. С. 315–320.
- [132] *Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А., Гупта Д.Н., Сак Х.* Характеристики квазиоднополярных электромагнитных импульсов, формируемых при взаимодействии мощных лазерных пучков с наноразмерными мишенями. *Квантовая электроника.* 2019. Т. 49. №8. С. 788–795.
- [133] <https://github.com/swissel/Dusty-XOOPIC/tree/master/hoopic>
- [134] <https://txcorp.com/vsim/>
- [135] *Nieter C., Cary J.R.* "VORPAL: a versatile plasma simulation code" *Journal of Computational Physics* 196 (2004) 448–473.
- [136] PHYS 4011–HEA, Lecture 5: "Radiation from moving charges". P. 41–52.

- [137] *В. П. Дымников, Д. В. Кулямин, П. А. Останин.* Совместная модель глобальной динамики термосферы и ионосферы земли. Известия российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. №3. С. 280–292.
- [138] *Фортон В.Е.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том I. М.: Наука. 2000. 585 с.